دستور مشتق زنجیری (مشتق تابع مرکب)

اگر تابع $g(x)$ در نقطه $x=a$ مشتق پذیر و تابع $f(x)$ در نقطه $b=g(a)$ مشتق پذیر باشد آنگاه:

$$(fog)'(a)=g'(a).f'[g(a)]$$

نتیجه : اگر y تابعی بر حسب u و u تابعی بر حسب x باشد، آنگاه:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

مثال: اگر $y=\ln u$ و $u=e^x$ مشتق y نسبت به x را به دست آورید.

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{du}&=\frac{d}{du}(\ln u)=\frac{۱}{u}\\ \frac{du}{dx}&=\frac{d}{dx}(e^x)=e^x\end{aligned}\right\}\implies\frac{dy}{dx}=\frac{۱}{u}\times e^x=\frac{۱}{e^x}\times e^x=۱.$$

تست: اگر $y=\ln\sqrt{x^۲-۲x}$ و $x=\frac{۲t-۱}{t+۲}$ باشد، مقدار $\frac{dy}{dt}$ به ازای $t=-۷$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۱۵}$ ۲) $\frac{۲}{۱۲}$ ۳) $\frac{۳}{۱۵}$ ۴) $\frac{۳}{۱۲}$.

حل: گزینه (۱) صحیح است.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\ln\sqrt{x^۲-۲x}=\frac{۱}{۲}\frac{d}{dx}\ln(x^۲-۲x)=\frac{۱}{۲}\frac{۲x-۲}{x^۲-۲x}=\frac{x-۱}{x^۲-۲x}$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{۲t-۱}{t+۲}\right)=\frac{۲(t+۲)-(۲t-۱)}{(t+۲)^۲}=\frac{۵}{(t+۲)^۲}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\times\frac{dx}{dt}=\frac{x-۱}{x^۲-۲x}\times\frac{۵}{(t+۲)^۲}$$

اما چون $t=-۷$ لذا $x=\frac{۲(-۷)-۱}{-۷+۲}=۳$. بنابراین:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{۳-۱}{۳^۲-۲(۳)}\times\frac{۵}{(-۷+۲)^۲}=\frac{۲}{۳}\times\frac{۵}{۲۵}=\frac{۲}{۱۵}.$$

تست: حاصل $\frac{d(\ln\sin x)}{d(\ln x)}$ کدام است؟

الف) $x\cot x$ ب) $x\tan x$ ج) $\frac{\cot x}{x}$ د) $\frac{\tan x}{x}$

حل: گزینه الف صحیح است.

$$\frac{d(\ln\sin x)}{dx}=\frac{\cos x}{\sin x}\qquad,\qquad \frac{d(\ln x)}{dx}=\frac{۱}{x}\ .$$

$$\frac{d(\ln\sin x)}{d(\ln x)}=\frac{d(\ln\sin x)}{dx}\times\frac{dx}{d(\ln x)}=\frac{\cos x}{\sin x}\times\frac{۱}{\frac{۱}{x}}=x\cot x\ .$$

مشتق گیری از انتگرال

مشتق تابع $f(x)=\int_{P(x)}^{Q(x)}R(x)$ به صورت زیر است:

$$f'(x)=\ Q'(x)R\big(Q(x)\big)-P'(x)R\big(P(x)\big)$$

مثال: برای تابع $f(x)=\int_{x}^{x^۳}e^{۵x}\,dx$ حاصل $f'(۲)$ را به دست آورید.

$$f'(x)=۳x^۲\left(e^{۵x^۳}\right)-e^{۵x}$$

$$\Longrightarrow\quad f'(۲)=۳(۲)^۲(e^{۴۰})-e^{۱۰}=۱۲e^{۴۰}-e^{۱۰}\ .$$

تست: اگر $f(x)=\int_{۰}^{x}\ln t\,dt$ و $g(x)=x^۲$، مشتق تابع (fog) در نقطه $x=\sqrt{۲}$ کدام است؟

الف) $۱-۲\ln ۲$ ب) $۲\sqrt{۲}$ ج) $\ln ۲$ د) $۲\sqrt{۲}\ln ۲$

حل: گزینه د صحیح است.

$$f(x)=\int_{۰}^{x}\ln t\,dt=x\ln x-x$$

$$\Longrightarrow\ fog(x)=f\big(g(x)\big)=f(x^{۲})=\ x^{۲}\ln x^{۲}-x^{۲}$$

$$\Longrightarrow\ \big(fog(x)\big)'={۲}x\ln x^{۲}+x^{۲}\times\frac{{۲}x}{x^{۲}}-{۲}x={۲}x\ln x^{۲}\,.$$

$$\Longrightarrow\ \Big(fog(\sqrt{۲})\Big)'={۲}\sqrt{۲}\ln\big(\sqrt{۲}\big)^{۲}={۲}\sqrt{۲}\ln {۲}\ .$$

مشتق تابع $f(x)=\int_{P(x)}^{Q(x)}R(x)$ به صورت زیر است:

$$f'(x)=\ Q'(x)R\big(Q(x)\big)-P'(x)R\big(P(x)\big)$$

مشتق توابع پارامتری

اگر تابعی بصورت پارامتری با روابط $\begin{cases}x=f(t)\\ y=g(t)\end{cases}$ بیان شود، آنگاه خواهیم داشت:

$$\frac{d_y}{d_x}=\frac{{d_y}/{d_t}}{{d_x}/{d_t}}$$

نکته : مشتق تابع $f(x)$ نسبت به تابع $g(x)$ برابر است با $\frac{f'(x)}{g'(x)}$؛ یعنی از دو تابع نسبت به X مشتق می گیریم و مشتقها را بر هم تقسیم می کنیم.

مثال : مشتق منحنی به معادلات پارامتری زیر را بیابید؟

$$\begin{cases}x=1-\cos t\\ y=1+\dfrac{1}{2}\sin t\end{cases}$$

حل: با توجه به تعریف مشتق پارامتری داریم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{2}\cos t}{\sin t}=\frac{1}{2}\cot t$$

مثال : اگر $u=x^3-3x, y=\sqrt{u^2+u}$ باشد آنگاه مقدار $\frac{dy}{dx}$ را در نقطه $x=2$ بیابید؟

حل: می‌دانیم اگر $x=2$ باشد آنگاه $u=2^3-3(2)=2$ و

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2u+1}{2\sqrt{u^2+u}}\ ;\ \frac{du}{dx}=3x^2-3$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=\frac{2u+1}{2\sqrt{u^2+u}}\times(3x^2-c)\Rightarrow y'_{x=2}=\left(\frac{2\times2+1}{2\sqrt{2^2+2}}\right)\times(3(2^2)-3)$$

$$\Rightarrow y'_{x=2}=\frac{5}{2\sqrt6}\times9=\frac{45}{2\sqrt6}=\frac{45\sqrt6}{12}=\frac{15\sqrt6}{4}$$

مثال : مشتق تابع $y=\cos^2 x$ نسبت به $u=\sin x$ را به دست آورید.

حل: مشتق تابع y نسبت به تابع u از رابطه $\frac{y'}{u'}$ بدست می‌آید، لذا برابر است با:

$$\left.\begin{array}{l}y'=-2\sin x.\cos x\\ u'=\cos x\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{y'}{u'}=\frac{-2\sin x.\cos x}{\cos x}=-2\sin x$$

تست: اگر $x=a(t-\sin t)$ و $y=a(۱-\cos t)$ باشد، مشتق y نسبت به x کدام است اگر $t\neq ۲k\pi$ باشد؟

الف) $\cos\frac{t}{۲}$ ب) $\sin\frac{t}{۲}$ ج) $\tan\frac{t}{۲}$ د) $\cot\frac{t}{۲}$

حل: گزینه د صحیح است.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{a\sin t}{a-a\cos t}=\frac{\sin t}{۱-\cos t}=\cot\frac{t}{۲}\ .$$

مشتق مرتبه n–اُم

اگر تابع $f'(x)$ در نقطه $x_\circ$ پیوسته و مشتق‌پذیر باشد آنگاه مشتق آن را با نماد $f''(x)$ نشان می‌دهیم و آن را مشتق دوم تابع f در نقطه $x_\circ$ می‌نامیم. به همین ترتیب می‌توان مشتق تابع $f''(x)$ را در نقطه $x_\circ$ بدست آورد که آن را با $f'''(x)$ نشان می‌دهیم. توجه کنید $f^{(n)}(x)$ نشان دهنده مرتبه مشتق‌گیری است که تا مرحله n- ام می‌باشد.

مثال : مشتق مرتبه چهارم توابع زیر را بیابید؟

الف) $f(x)=x^4+3x^2+1$ ب) $g(x)=\sin^2 x$

پ) $h(x)=e^{\sin x}$ ت) $k(x)=e^x+2\cos x$

حل) الف)

$$f'(x)=4x^3+6x$$

$$f''(x)=12x^2+6$$

$$f'''(x)=24x$$

$$f^{(4)}(x)=24$$

$$f^{(5)}(x)=\circ$$

ب)

$$g'(x)=2\sin x.\cos x$$

$$g''(x)=2(\cos x)(\cos x)+2\sin x(-\sin x)=2\cos^2 x-2\sin^2 x$$

$$g'''(x)=-4\sin x.\cos x-4\sin x.\cos x=-8\sin x.\cos x$$

$$g^{(4)}(x)=-8\cos^2 x+8\sin^2 x$$

پ)

$$h'(x)=\cos x.e^{\sin x}$$

$$h''(x) = -\sin x.e^{\sin x} + \cos x.\cos x.e^{\sin x} = e^{x}(\cos^2 x - \sin x)$$

$$h'''(x) = e^{x}(\cos^2 x - \sin x) + e^{x}(-2\sin x.\cos x - \cos x)$$

$$h^{(4)}(x) = e^{x}(\cos^2 x - \sin x) + e^{x}(-2\sin x.\cos x - \cos x) + \\ + e^{x}(-2\sin x.\cos - \cos x) + e^{x}(-2\cos^2 x + 2\sin^2 x + \sin x)$$

(ت)

$$k'(x) = e^{x} - 2\sin x$$

$$k''(x) = e^{x} - 2\cos x$$

$$k'''(x) = e^{x} + 2\sin x$$

$$k^{(4)}(x) = e^{x} + 2\cos x.$$

تست: مشتق مرتبه پنجم تابع $y = e^{۲x} + x$ در نقطه $x = ۰$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۱۰ ٤) ۳۲

حل: گزینه (٤) صحیح می باشد.

$$y' = ۲e^{۲x} + ۱ \to y'' = ۲^{۲} e^{۲x} \to \ldots \to y^{(۵)} = ۲^{۵} e^{۲x} \Rightarrow y^{(۵)}(۰) = ۳۲$$

تست: اگر $y = \ln x$ باشد در اینصورت $D_x^n y$ کدام است؟

الف) $\frac{(n-۱)!}{x^n}$ ب) $\frac{(-۱)^n\, n!}{x^n}$ ج) $\frac{(-۱)^{n-۱}\,(n-۱)!}{x^n}$ د) $\frac{(-۱)^n\,(n-۱)!}{x^n}$.

حل: گزینه ج صحیح است. با چند مرتبه مشتق گیری از تابع $y = \ln x$ و جایگذاری در گزینه ها به دست می آوریم:

$$y' = \frac{۱}{x} \quad \xrightarrow{ج} \quad n = ۱ \ : \ \frac{(-۱)^{۱-۱}\,(۱-۱)!}{x^{۱}} = \frac{۱ \times ۰!}{x} = \frac{۱ \times ۱}{x} = \frac{۱}{x}$$

$$y'' = \frac{-۱}{x^{۲}} \quad \xrightarrow{ج} \quad n = ۲ \ : \ \frac{(-۱)^{۲-۱}\,(۲-۱)!}{x^{۲}} = \frac{-۱ \times ۱!}{x^{۲}} = \frac{-۱ \times ۱}{x^{۲}} = \frac{-۱}{x^{۲}}$$

$$y''' = \frac{۲}{x^۳} \quad \xrightarrow{ج} \quad n = ۳ \; : \quad \frac{(-۱)^{۳-۱}\,(۳-۱)!}{x^۳} = \frac{۱ \times ۲!}{x^۳} = \frac{۱ \times ۲}{x^۳} = \frac{۲}{x^۳}$$

$\vdots$

کاربردهای مشتق

تعیین معادله خط مماس و قائم بر یک منحنی

برای نوشتن معادله خط مماس بر منحنی $y = f(x)$ در نقطه $A(a,b)$ واقع بر آن، ابتدا ضریب زاویه خط مماس را از رابطه $m = f'(a)$ بدست آورده و بعد معادله خط مماس را با توجه به رابطه $y-b = m.(x-a)$ می‌نویسیم.

همچنین برای نوشتن معادله خط قائم بر منحنی، ابتدا ضریب زاویه خط قائم را از رابطه $m' = \frac{-1}{m}$ بدست آورده و سپس معادله خط قائم را با توجه به رابطه $y-b = m'(x-a)$ می‌نویسیم.

مثال : معادله خط مماس بر منحنی $x^2y^2 + 2xy + x - y = ۰$ را در نقطه $A(1,1)$ به دست آورید.

$$m = f'(a,b) = f'(1,1) \qquad ; \qquad m' = -\tfrac{1}{m}$$

$$f'(x,y) = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2xy^2 + 2y + 1}{2yx^2 + 2x - 1}$$

$$\Rightarrow m = f'(1,1) = \frac{2+2+1}{2+2-1} = \frac{5}{4} \;, m' = -\tfrac{1}{m} = \frac{-4}{5}$$

معادله خط مماس: $y - 1 = \frac{5}{4}(x-1) \Rightarrow y - \frac{5}{4}x + \frac{1}{4} = ۰$

معادله خط قائم: $y - 1 = \frac{-4}{5}(x-1) \Rightarrow y + \frac{4}{5}x - \frac{1}{5} = ۰$

تست: ضریب زاویه خط مماس بر منحنی $\begin{cases} x = t^۲ + ۳t + ۲ \\ y = ۲t^۲ - ۲t - ۱ \end{cases}$ در نقطه $(۲, -۱)$ کدام است؟

الف) $-\frac{۳}{۲}$ ب) $\frac{۱}{۴}$ ج) ۴   د) $-\frac{۲}{۳}$

حل: گزینه د صحیح است.

$$\begin{cases} 2 = t^2 + 3t + 2 \\ -1 = 2t^2 - 2t - 1 \end{cases} \Rightarrow t = 0 \qquad ;\ y'_x = \frac{d_y/d_t}{d_x/d_t} = \frac{4t-2}{2t+3}$$

$$\Rightarrow m = y'_x(0) = \frac{(4\times 0)-2}{(2\times 0)+3} = \frac{-2}{3}$$

تست: شیب خط مماس بر منحنی $y = x^۳ - ۳x + ۳$ در نقطه $(۰,۳)$ چقدر است؟

الف) -۳ ب) ۳ ج) $\frac{۱}{۳}$ د) $-\frac{۱}{۳}$

حل: گزینه صحیح وجود ندارد.

$$y' = ۳x^۲ - ۳ \implies y'(۰) = ۳(۰)^۲ - ۰ = ۰\ .$$

تست: شیب خط قائم بر منحنی $y = x^۳ - x^۲$ در نقطه ای به طول ۱ عبارت است از:

الف) ۱ ب) ۲ ج) -۱ د) -۲

حل: گزینه ج صحیح است.

$$y' = ۳x^۲ - ۲x \implies y'(۱) = ۳(۱)^۲ - ۲(۱) = ۱ \implies m' = -\frac{۱}{۱} = -۱\ .$$

تست: هرگاه شیب مماس بر منحنی $y = f(x)$ در نقطه $M(۱,-۱)$ برابر ۳ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{f(x)+۱}{x^۳-۱}$ برابر است با:

الف) ۱ ب) ۳ ج) -۳ د) -۱

حل: گزینه الف صحیح است.

$$\lim_{x\to ۱} \frac{f(x)+۱}{x^۳-۱} = \frac{f(۱)+۱}{(۱)^۳-۱} = \frac{-۱+۱}{(۱)^۳-۱} = \frac{۰}{۰}$$

از قاعده هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)+۱}{x^{۳}-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{f'(x)}{۳x^{۲}}=\frac{f'(۱)}{۳(۱)^{۲}}=\frac{۳}{۳(۱)^{۲}}=۱\,.$$

نکته : الف) اگر $f'(x)$ در نقطه $x=a$ برابر $\pm\infty$ شود یعنی $m=f'(a)=\pm\infty$، آنگاه خط مماس بر منحنی، موازی محور y ها می‌باشد یعنی داریم $x=a$.

الف) هرگاه $m=f'(a)=\circ$، آنگاه خط مماس بر منحنی موازی محور x ها می‌باشد یعنی داریم $y=b=f(a)$.

مثال : معادله خط قائم و مماس بر منحنی $y=\sqrt{x}$ را در نقطه $x=\circ$ بیابید.

حل: ابتدا شیب خط مماس و قائم را بدست می آوریم، لذا:

$$m=f'(x=\circ)\quad ;f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$m=f'(\circ)=\frac{1}{\circ}=+\infty\qquad ;m'=\frac{-1}{m}=-\frac{1}{\infty}=\circ$$

بنابراین معادله خط مماس برابر $x=\circ$ می‌باشد و معادله خط قائم برابر $y=\circ$ می‌باشد.

نکته : برای یافتن معادله خط مماس یا قائم بر نمودار تابع f از نقطه $A(a,b)$ خارج از نمودار، کافیست معادله خط مورد نظر را در نقطه دلخواه $B(x_\circ,y_\circ)$ واقع بر نمودار f را بنویسیم، سپس $x_\circ$ را طوری تعیین کنیم که نقطه A در معادله صدق می‌کند.

مثال : معادله خط قائم بر نمودار تابع $y=x+e^{-x}$ در نقطه تلاقی آن با محور y ها را بیابید؟

حل: در نقطه تلاقی با محور y ها داریم $x=\circ$ و از طرفی $y'=1-e^{-x}$

$$m=y(\circ)=1-e=1-1=\circ\qquad ;\qquad m'=\frac{-1}{m}=\frac{-1}{\circ}=\infty$$

بنابراین خط قائم موازی محور y ها می‌باشد و چون از نقطه بطول صفر عبور می‌کند لذا معادله آن $x=\circ$ می‌باشد.

تست: شیب خط قائم بر منحنی $y=x^{۳}-x^{۲}$ در نقطه ای به طول ۱ عبارت است از:

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۱− د) ۲−

حل: گزینه ج صحیح است.

$$y' = ۳x^۲ - ۲x \implies y'(۱) = ۳(۱)^۲ - ۲(۱) = ۱$$

$$\implies m' = -\frac{۱}{m} = -\frac{۱}{۱} = -۱ .$$

تست: معادله خط مماس بر منحنی $y = e^{۳x} + ۱$ درنقطه $x = ۰$ کدام است؟

۱) $y = x - ۲$ ۲) $y = x + ۲$ ۳) $y = ۳x + ۲$ ٤) $y = ۳x - ۲$

حل: گزینه (۳) صحیح می باشد.

$$x = ۰ \to y = e^{۰} + ۱ \to y = ۲ \Rightarrow (۰,۲)$$
$$y' = ۳e^{۳x} \underset{\text{مماس}}{\Rightarrow} m = y'(۰) = ۳e^{۰} = ۳$$
$$y - ۲ = ۳(x - ۰) \Rightarrow y = ۳x + ۲$$

تست: خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = x^۲ \cdot Ln(x-۲)$ در نقطه ای به طول ۳ واقع بر آن، محور y ها را باکدام عرض قطع می کند؟

۱) -۲۷ ۲) -۲٤ ۳) -۱۸ ٤) -۱۵

حل: گزینه (۱) صحیح می باشد.

$x = ۳ \to y = ۹Ln۱ = ۹ \times ۰ = ۰$: $(۳,۰)$ نقطه تماس

$$f'(x) = ۲xLn(x-۲) + x^۲ \cdot \frac{۱}{x-۲}, m = f'(۳) = ٦Ln۱ + ۹$$
$$y - y_۱ = m(x - x_۱) \Rightarrow y - ۰ = ۹(x - ۳)$$

محور y : $x = ۰ \to y = -۲۷$

تست: معادله خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = \frac{۱+\sqrt{x}}{۱-\sqrt{x}} + \frac{۱-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}$ در نقطه $x = ۲$ کدام است؟

۱) $y = ۲x - ۸$ ۲) $y = x - ۸$

۳) $y = 2x - 10$ ٤) $y = ٤x - ١٤$

حل: گزینه (٤) صحیح می باشد.

$$f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \frac{(1+\sqrt{x})^2 + (1-\sqrt{x})^2}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{1+2\sqrt{x}+x+1-2\sqrt{x}+x}{1+x} = \frac{2+2x}{1-x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2(1-x)+(2+2x)}{(1-x)^2} = \frac{4}{(1-x)^2}$$

$$m_{\text{مماس}} = f'(2) = 4$$

$$x = 2 \rightarrow y(2) = \frac{2+4}{1-2} = -6$$

$$y - y_\circ = m(x - x_\circ) \Rightarrow y + 6 = 4(x-2) \Rightarrow y = 4x - 14$$

اکسترمم‌های نسبی و مطلق

تعریف : الف) نقطه $x = x_\circ$ را یک نقطه **ماکزیمم نسبی** تابع f گوئیم هرگاه در یک همسایگی باز $x_\circ$ مانند I داشته باشیم:

$$\forall x \in I \quad ; \qquad f(x) \le f(x_0)$$

ب) نقطه $x = x_\circ$ را نقطه **مینیمم نسبی** تابع f می نامیم هرگاه در یک همسایگی باز $x_\circ$ مانند I داشته باشیم:

$$\forall x \in I \quad ; \qquad f(x) \ge f(x_\circ)$$

نکته : الف) اگر تابع f در نقطه $x = x_\circ$ دارای ماکزیمم یا مینیمم نسبی باشد آنگاه باید مشتق f در صورت وجود در نقطه $x = x_\circ$ برابر صفر باشد و تابع حول آن تغییر علامت دهد و یا مشتق در نقطه $x = x_\circ$ موجود نباشد.

ب) ممکن است تابع در نقطه $x = x_\circ$ دارای اکسترمم باشد ولی تابع در آن نقطه مشتق‌پذیر نباشد. مانند $x = \circ$ که مینیمم تابع $y = |x|$ است اما در این نقطه مشتق پذیر نیست.

پ) نقاط ابتدا و انتهای بازه نمی‌توانند نقطه اکسترمم نسبی تابع باشند.

نکته : (آزمون مشتق اول) برای تعیین نقاط اکسترمم نسبی تابع، ابتدا ریشه‌های معادله مشتق تابع را به دست آورده و آن را تعیین علامت می‌کنیم. در صورتی که مشتق تابع حول این نقطه تغییر علامت دهد و این تغییر علامت از مثبت به منفی باشد آنگاه آن نقطه، **ماکزیمم نسبی** و در صورتی که از منفی به مثبت تغییر علامت دهد آنگاه آن نقطه **مینیمم نسبی** تابع است.

مثال : اکسترمم های نسبی تابع $y = x^{۳} + ۳x^{۲} + ۳x$ را در صورت وجود بیابید.

حل: داریم:

$$y' = ۳x^{۲} + ۶x + ۳ = ۳(x^{۲} + ۲x + ۱) = ۳(x + ۱)^{۲} = ۰$$

$$\Longrightarrow x = -۱$$

x	-∞		-۱		+∞
y'	+		۰		+
y	+∞	↗	-۱	↗	+∞

لذا $x = ۱$ نقطه اکسترمم تابع نمی باشد.

مثال: نقاط اکسترمم نسبی تابع $y = x^{۲}e^{-x} + ۱$ را در صورت وجود بیابید.

$$y' = ۲xe^{-x} - x^{۲}e^{-x} = ۰ \Longrightarrow e^{-x}(۲x - x^{۲}) = ۰ \Longrightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۲ \end{cases}$$

x	-∞		۰		۲		+∞
y'		−	۰	+	۰	−	
		↘		↗		↘	

بنابراین نقطه $x = ۰$ نقطه مینمم نسبی و نقطه $x = ۲$ نقطه ماکزیمم نسبی تابع است.

تست: اگر $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ باشد مینیمم تابع چه مقدار است وقتی که $a > ۰$ ، $b > ۰$ و $x > ۰$ باشد؟

الف) $\frac{a}{b}$ ب) $\frac{b}{a}$ ج) $\sqrt{\frac{a}{b}}$ د) $\sqrt{\frac{b}{a}}$

حل: گزینه د صحیح است.

$$f'(x) = a - \frac{b}{x^{۲}} = ۰ \implies a = \frac{b}{x^{۲}} \implies x^{۲} = \frac{b}{a} \implies x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$$

تست: ماکزیمم تابع f با ضابطه ی $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ و $x > ۰$ کدام است؟

الف) $\frac{۱}{\sqrt{e}}$ ب) $\frac{۱}{e}$ ج) $\sqrt{e}$ د) e

حل: گزینه د صحیح است.

$$f'(x) = ۰ \implies \frac{\frac{۱}{x} \times x - ۱ \times \ln x}{x^{۲}} = \frac{۱ - \ln x}{x^{۲}} = ۰ \implies ۱ - \ln x = ۰$$

$$\implies \ln x = ۱ \implies x = e\,.$$

تست: مقدار مینیمم تابع $f(x) = ۳^{(x^{۲}-۲)^{۳}+۸}$ کدام است؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳

حل: گزینه ب صحیح است.

$$f'(x) = ۰ \implies ۳(x^{۲} - ۲)^{۲}(۲x)۳^{(x^{۲}-۲)^{۳}+۸} \times \ln ۳ = ۰ \implies (x^{۲} - ۲)^{۲}(۲x) = ۰$$

$$\implies \begin{cases} x^{۲} - ۲ = ۰ \\ ۲x = ۰ \end{cases} \implies \begin{cases} x = \pm\sqrt{۲} \\ x = ۰ \end{cases}$$

لذا نقاط اکسترمم نسبی تابع عبارتند از ۰ و $\pm\sqrt{۲}$. می توان با جایگذاری این نقاط در تابع مقدار مینیمم تابع را به دست آورد.

$$f\left(\pm\sqrt{۲}\right) = ۳^{(۲-۲)^{۳}+۸} = ۳^{۸}$$

$$f(۰) = ۳^{(۰-۲)^{۳}+۸} = ۳^{-۸+۸} = ۳^{۰} = ۱\,.$$

تعریف: نقطه x_0 از دامنه تابع f را یک نقطه بحرانی تابع f می نامند، هرگاه $f'(x_0) = 0$ و یا f' در این نقطه موجود نباشد.

قضیه: (**آزمون مشتق دوم**) فرض کنید c یک نقطه ی بحرانی تابع f باشد بطوریکه $f'(c) = 0$ و $f(x)$ در همسایگی به شعاع δ حول نقطه c تعریف شده باشد. اگر $f''(c)$ موجود باشد، آنگاه:

الف) اگر $f''(c) < 0$ باشد آنگاه نقطه c نقطه ماکزیمم نسبی تابع f است.

ب) اگر $f''(c) > 0$ باشد آنگاه نقطه ی c نقطه ی مینمم نسبی تابع f است.

پ) اگر $f''(c) = 0$ از این آزمون نمی توان نتیجه ای گرفت.

تست: طول نقطه بحرانی تابع $y = 2x^4 + x$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ و ماکزیمم ۲) $\frac{1}{2}$ وعطف **۳)** $-\frac{1}{2}$ ومینیمم ٤) $-\frac{1}{2}$ وماکزیمم

حل: گزینه (۳) صحیح می باشد.

طول نقطه بحرانی $y' = 8x^3 + 1 = 0 \rightarrow x^3 = -\frac{1}{8} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

$y'' = 24x^2 , y''(-\frac{1}{2}) = 6 > 0 \Rightarrow \text{min}$

تست: نقطه بحرانی تابع $y = xLnx$ به کدام صورت است؟

۱) $x = e$ ماکزیمم ۲) $x = -e$ مینیمم **۳)** $x = e^{-1}$ مینیمم ٤) $x = -e^{-1}$ ماکزیمم

حل: گزینه (۳) صحیح می باشد.

$$y = xLnx \rightarrow y' = Lnx + x.\frac{1}{x} = Lnx + 1$$
$$y' = 0 \rightarrow Lnx + 1 = 0 \rightarrow Lnx = -1 \rightarrow x = e^{-1}$$
$$y'' = f''(x) = \frac{1}{x} \quad ; f''(e^{-1}) = \frac{1}{e^{-1}} = e > 0$$

قضیه : (تعیین صعودی و نزولی بودن تابع)

اگر تابع f در بازه $[a\ ,b]$ پیوسته باشد و در بازه $(a\ ,b)$ مشتق پذیر باشد، آنگاه :

الف) اگر به ازای هر $x \in (a,b)$ داشته باشیم $f'(x) \geq ۰$ ، آنگاه تابع f در بازه $[a,b]$ **صعودی** است.

ب) اگر به ازای هر $x \in (a,b)$ داشته باشیم $f'(x) \leq ۰$ ، آنگاه تابع f در بازه $[a,b]$ **نزولی** می باشد .