فصل پنجم
حرکت مداری الکترون

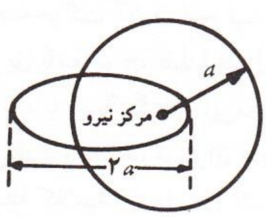
مقدمه

هر چند مدل اتمی بوهر در بیان برخی خصوصیات مهم اتم نظیر وجود حالتهای مانا، کوانتش انرژی و کوانتش اندازه حرکت زاویه ای موفق بوده است اما در تشریح جزئیات ساختارو طیفهای اتمی ناتوان است.
برای بررسی دقیق اتمهای چند الکترونی باید به مکانیک موجی متوسل شویم. از دید مکانیک موجی نمی توان به حرکت الکترون حول هسته یک مدار مشخص نسبت دهیم، بلکه تنها می توان احتمال حضور الکترون در نواحی مختلف را بررسی کرده و مکانهایی که الکترون به احتمال زیادتر یافت می شود را مشخص کرد.
از آنجا که بررسی دقیق توسط مکانیک موجی برای اتمهای پیچیده تر چند الکترونی مشکل است می توان به دیدگاه کلاسیکی برگشته و محدودیتهای لازم از طرف مکانیک موجی را وارد کنیم.

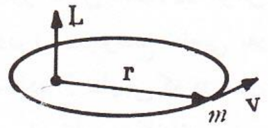
۵-۱ ثابتهای حرکت در سیستم کلاسیکی

وقتی ذره ای تحت تأثیر یک نیروی مرکزی، جاذبه ای و عکس مجذوری حرکت می کند (همچون حرکت سیاره به دور خورشید یا حرکت الکترون به دور یک ذره سنگین مثبت) یک دستگاه منزوی و مقید تشکیل می دهد. این دستگاه منزوی و مقید با چندین ثابت حرکت مشخص می شود. ثابتهای حرکت آن کمیتهای فیزیکی هستند که با زمان تغییر نمی کنند و انرژی کل و اندازه حرکت زاویه ای دستگاه را شامل می شوند. چون در مکانیک موجی هر یک از ثابتهای حرکت نه تنها با کمیتی که نسبت به زمان ثابت است بلکه با کمیتی که کوانتیده نیز هست مطابقت دارد، بنابراین به عنوان مقدمه ای برای بحث پیرامون جنبه های مکانیک موجی دستگاههای اتمی بهتر این است که ثابتهای حرکت یک دستگاه سیاره ای کلاسیک را مرور کنیم.
می دانیم که مسیر ذره مقیدی که تحت تأثیر یک نیروی مرکزی عکس مجذوری از نقطه ثابتی حرکت می کند یک بیضی است که مرکز نیروی آن در کانون است. اولین ثابت حرکت، یعنی انرژی کل، یا انرژی جنبشی به علاوه انرژی پتانسیل برای یک دستگاه سیاره ای کلاسیک (همانند یک اتم هیدروژن با اندازه بسیار بزرگ) از رابطه $E=-ke^2/2a$ بدست می آید، که در آن a نصف قطر بزرگ بیضی است. (شکل ۵-۱)
انرژی E، برای هر زوج ذره بر هم کنش کننده مفروض، فقط به a بستگی دارد. از این رو، انرژی کل دستگاه، برای هر دو مدار شکل ۵-۱ یکسان است؛ یکی از این دو مدار یک بیضی نسبتاً کشیده و دیگری دایره ای است که مرکز نیرو در مراکز آن واقع است (و شعاع آن a است). اگرچه تمام مدارهای با مقدار یکسان a دارای انرژی یکسان اند، اما در بزرگی دومین ثابت حرکت با هم تفاوت دارند: اندازه حرکت زاویه ای مداری کل دستگاه.

اندازه حرکت زاویه ای یک ذره در حال دوران، که نسبت به مرکز نیروی ثابت اندازه گیری شود، برابر $L=r\times mv$ است. (شکل ۵-۲) تا زمانی که نیروی وارد بر ذرهمتحرک مرکزی است (در امتداد خط واصل بین ذره و مرکز نیرو)، اندازه حرکت زاویه ای مداری دستگاه (L)، هم از نظر بزرگی و هم از نظر جهت، ثابت است. جهت L بر صفحه مدار عمود است و با قاعده دست راست به جهت چرخش ذره مربوط می شود.



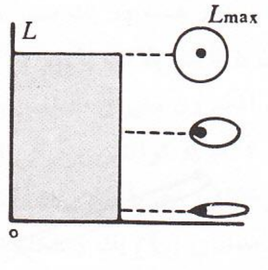
شکل ۵-۱ برای یک نیروی جاذبه عکس مجذوری، انرژی کل یک دستگاه فقط به نصف قطر بزرگ (a) بستگی دارد.



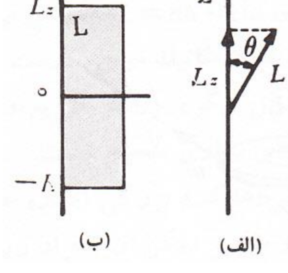
شکل ۵-۲ اندازه حرکت زاویه‌ای $L=r\times mv$ یک ذره در حال دوران.

اکنون چند مدار بیضی وار را در نظر می گیریم که همه دارای نصف قطر بزرگ یکسان a و از این رو دارای انرژی کل یکسان اند، ولی در خروج از مرکز با هم اختلاف دارند. مدار با کمترین خروج از مرکز مداری است که در آن ذره بر یک مسیر دایره ای حرکت می کند؛ یعنی، همواره به فاصله یکسان a از مرکز نیرو قرار دارد؛ مدار با بیشترین خروج از مرکز، بیضی رمبیده ای است که یک کانون آن در نزدیکی نقطه برگشت قرار دارد و به صورت یک خط راست است. مدار دایره ای نمایشگر اندازه حرکت زاویه ای مداری بیشینه و مدار رمبیده (فرو ریخته) نمایشگر اندازه حرکت زاویه ای مداری صفر است. در شکل ۵-۳ دیده می شود که بزرگی L به طور پیوست بین دو حد تغییر می کند؛ در نتیجه به ازای یک انرژی کل معین، اندازه حرکتهای زاویه ای مداری گوناگونی وجود دارند که به طور پیوسته از صفر تا یک بیشینه تغییر می کنند.

چون اندازه حرکت زاویه ای مداری (L) دستگاه منزوی هم از نظر جهت و هم از نظر بزرگی ثابت است، مولفه L_Zآن در امتداد هر محور Zی در فضا نیز ثابت است؛ این سومین ثابت حرکت است. از شکل۵-۴ الف در می یابیم که $L_z = L\cos\theta$است، که در آن θ زاویه بین L و جهت مثبت محور Z ست. در فیزیک کلاسیک هیچگونه محدودیتی در انتخاب راستای Z وجود ندارد؛ در نتیجه، همان طور که شکل ۵-۴ب نشان می دهد، L_Zمی تواند از $+L$ تا $-L$ به طور پیوسته تغییر کند. به عبارت دیگر، بسته به انتخاب راستای Z، زاویه θ می تواند هر مقداری از ۰ تا ۱۸۰ را اختیار کند. به طور خلاصه، هیچ محدودیت کلاسیکی در انتخاب راستاهای ممکن بردار اندازه حرکت زاویه ای مداری L وجود ندارد. این بررسی به ظاهر بی اهمیت دارای نتایج مهمی از نظر مانستگی یا مکانیک موجی است.



شکل ۵-۳: مقادیر مجاز کلاسیکی اندازه حرکت

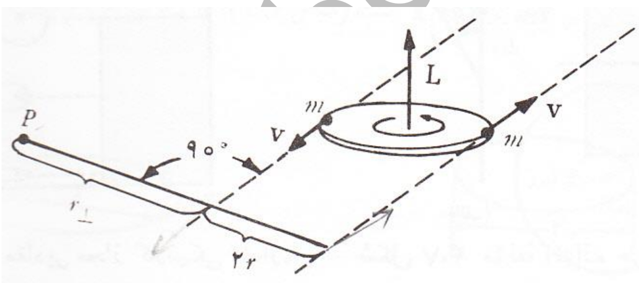


شکل ۵-۴: مولفه اندازه حرکت زاویه‌ای مداری در

زاویه‌ای مدارهای بیضی‌وار با قطر بزرگ (یا با انرژی) یکسان.
راستای اختیاری Z: (الف) سمتگیری نسبت به L، (ب)مقادیر مجاز کلاسیکی برای مقدار مفروضی از L.

چنانچه یک جسم در حال دوران دارای گسترش متناهی در فضا باشد و حول یک محور داخلی دوران بچرخد، در آن صورت، علاوه بر اندازه حرکت زاویه ای مداری دستگاه، یک اندازه حرکت زاویه ای اسپینی نیز وجود دارد. اگر هیچ گشتاور نیروی خارجی بر جسم در حال دوران وارد نشود اندازه حرکت زاویه ای اسپینی ثابت باقی می ماند و این چهارمین ثابت حرکت کلاسیکی است. اندازه حرکت زاویه ای اسپینی یک جسم در حال دوران (مانند دوران زمین حول مرکز جرم خود) با تعیین سهم هر یک از ذرات در جسم چرخان محاسبه می شود. از رابطه برداری $L=r\times mv$ (یا از رابطه نرده ای هم ارز آن، $L=r_\perp mv$ ، در جهت L) استفاده می کنیم. ویژگی قابل ملاحظه اندازه حرکت زاویه ای اسپینی آن است که بزرگی و جهت آن، در امتداد محور چرخشی، فقط به شرطی که جسم چرخان متقارن باشد و حول یک محور تقارن دوران کند، ثابت و از انتخاب محورها برای محاسبه اندازه حرکت زاویه ای مستقل است.

اثبات این امر ساده. دو ذره را در نظر می گیریم که جرم هر یک m است و مطابق شکل ۵-۵، با سرعت یکسان v در دو راستای مخالف حرکت می کنند. این دو ذره نسبت به محور چرخش متقارن اند و فاصله هر یک از مرکز دایره مسیر خود r است. اندازه حرکت زاویه ای کل این زج ذره را نسبت به نقطه دلخواه Pمحاسبه می کنیم. با توجه به اینکه اندازه حرکت یک ذره، مثبت و دیگری منفی است، برای اندازه حرکت زاویه ای کل این زوج داریم.



شکل ۵-۵: اندازه حرکت زاویه ای اسپینی کل L(نسبت به نقطه دلخواه P) دو ذره که نسبت به محور چرخش متقارن اند.

$$L_{زوج} = mv(r_\perp + 2r) - mvr_\perp = 2mvr$$

اندازه حرکت زاویه $2mvr$ این زوج ذره که به طور متقارن قرار گرفته اند از محل p مستقل است (مستقل از $r_\perp$). چون جسم چرخان را حول محور دوران، متقارن اختیار می کنیم، می توان آن را به صورت ترکیبی از چنین زوج ذراتی پنداشت که هر کدام با اندازه حرکت زاویه ای مستقل از انتخاب محور، در اندازه حرکت زاویه ای کل سهیم اند. از این رو، اندازه حرکت زاویه ای اسپینی کل جسم، مستقل از محور است. همان طور که در شکل ۵-۵ نشان داده شده است، معمولاً بردار اندازه حرکت زاویه ای اسپینی را در امتداد محور چرخش قرار می دهیم؛ اما با توجه به اثبات فوق، این بردار می توانست هر جای دیگری قرار بگیرد. اثبات اینکه اندازه حرکت زاویه‌ای اسپینی از چارچوب لخت مستقل است دشوار نیست. در این صورت اندازه حرکت زاویه‌ای یک جسم متقارن چرخان، خاصیت ذاتی آن است؛ و گاهی آن را اندازه حرکت زاویه ای ذاتی نیز می نامند.

اندازه حرکت زاویه‌ای کل یک دستگاه متشکل از اجسام، شامل جمع برداری اندازه حرکتهای زاویه‌ای مداری واسپینی است؛ هنگامی که این دستگاه منزوی است اندازه حرکت زاویه ای کل آن ثابت است خواهیم دید که به ذراتی چون الکترونها باید، علاوه بر اندازه حرکتهای زاویه ای مداری، اندازه حرکتهای زاویه ای ذاتی نیز نسبت داده شود.

۵-۲ کوانتش اندازه حرکت زاویه مداری

نظریه اتم تک الکترونی بوهر عدد کوانتومی اصلی n را معرفی می کند که مقدار درست آن انرژی کل اتم را، طبق رابطه $E_n=-E_I/n^2$ ، به دست می دهد. در رابطه فوق E_I انرژی یونش است. عدد کوانتومی n، بزرگی اندازه حرکت زاویه ای L (ناشی از دوران الکترون به دور هسته در یک مسیر دایره ای) را نیز، طبق رابطه $L=nh$، مشخص می کند، که در آن h ثابت پلانک تقسیم بر 2π است. ولی از دیدگاه مکانیک موجی درست نیست که برای الکترون مسیری مشخص به شکل دایره یا هر شکل دیگری در نظر بگیریم، و قاعده بوهر نیز در مورد کوانتش بزرگی اندازه حرکت زاویه ای مداری صحیح نیست.

برخلاف نظریه کلاسیک، مکانیک موجی نشان می دهد که بزرگی اندازه حرکت زاویه ای مداری (L) یک دستگاه اتمی کوانتیده است و مقادیر ممکن آن به قرار زیرند.

$$L = \sqrt{l(l+1h)}$$

که در آن l عدد درستی است که عدد کوانتومی اندازه حرکت زاویه ای مداری نامیده می شود. برای مقدار مفروضی از عدد کوانتومی اصلی n، مقادیر ممکن l، اعداد درست از صفر تا n-1 را در بر می گیرند.

$$l=0,1,2,3,....,n-1$$

از ین رو، به ازای $n=1$، تنها مقدار ممکن l برابر صفر است و از رابطه بالا مقدار L برابر صفر است. به ازای $N=2$، مقدار l محدود به ۰ یا ۱ است، و مقادیر متناظر L به ترتیب صفر و $\sqrt{2}h$ هستند، عموماً برای یک مقدار مفروض از n، n مقدار ممکن برای l و بنابراین n مقدار ممکن برای اندازه حرکت زاویه ای مداری وجود دارد. همان طور که در زیر می آید غالباً مقادیر درست عدد کوانتومی l، با نمادهای حرفی نمایش داده می شود (به دلایلی که منشأ تاریخی دارند)

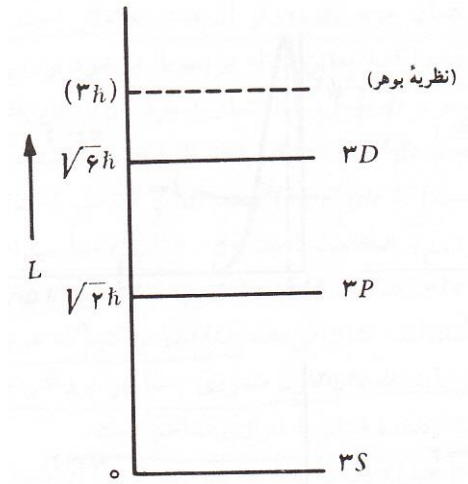
$$l=0,1,2,3,4,5,....$$

نماد $=S,P,PD,F,G,H,...$

در حالی که در نظریه بوهر حالت اتم با عدد کوانتومی N(و بنابراین، با شعاع مدار دایره ای یا انرژی کل) مشخص می شود، در مکانیک موجی حالت یک اتم با مقادیری از تمامی اعداد کونتومی مناسب مشخص می شود. در مکانیک موجی هر حالت بریک تابع موج مجزا و مشخص ψ مطابقت دارد که با دیگر توابع از طریق بستگی به مختصات فضایی متفاوت است. مثلا آن حالتهایی که برای آنها n برابر ۳ و l برابر ۰، ۱ و ۲ است به ترتیب، حالتهای $3D$, $3P$, $3S$ نامیده می شوند. مقادیر متنظر با اندازه حرکت زاویه ای مداری در این حالتها عبارت اند از ۰، $\sqrt{6}h, \sqrt{2}h$ (شکل۵-۶). چون حالتهای $3D$, $3P$, $3S$ دارای یک مقدار مشترک (۳) از عدد کوانتومی اصلی n اند، لذا برای تک الکترونی که تحت تأثیر یک نیروی کولنی از جانب هسته

است و به صورت یک بار نقطه ای فرض می شود، این سه حالت دارای انرژیهای یکسان اند ولی در اندازه حرکت زاویه ای و در بستگی فضایی تابع موج، تفاوت دارند. به چنین حالتهایی، که در انرژی کل یکسان ولی در یک مورد دیگر اختلاف دارند، حالتهای واگن گفته می شود.

یادآور می شویم که در مدل سیاره ای کلاسیک انرژی کل یک دستگاه مقید، فقط به بزرگی قطر بزرگ بیضی بستگی دارد و به خروج از مرکز مدارها یا به اندازه حرکت زاویه ای مداری بستگی ندارد. در نظریه کوانتومی وضع مشابهی حاصل می شود: به ازای یک مقدار مفروض از n، که انرژی اتم را مشخص می کند، n مقدار ممکن برای l وجود دارند که هر کدام مقدار ممکن دیگری از اندازه حرکت زاویه ای مداری را مشخص می کند. یک تفاوت مهم آن اس که، در حالی که نظریه کلاسیک هیچ محدودیتی بر مقادیر ممکن اندازه حرکت زاویه ای اعمال نمی کند، نظریه کوانتومی آنها را به مقادیر گسسته و کوانتیده محدود می کند.



شکل ۶,۷: مقادیر مجاز بزرگی اندازه حرکت زاویه ای مداری به ازای $n=3$.

در نظریه کلاسیک مدارهای متناظر با مقادیر کوچک اندازه حرکت زاویه‌ای، آن مدارهایی هستند که دارای خروجی از مرکز بزرگ‌اند؛ مدار دایره‌ای برای یک قطر بزرگ (یا انرژی) مفروض دارای بزرگترین اندازه حرکت زاویه ای است. می‌توان این مطلب را این تعبیر کرد که برای یک قطر بزرگ (یا انرژی) مفروض مدار با اندازه حرکت زاویه ای کوچک مدری است ک برای یک قطر بزرگ (یا انرژی) مفروض مدار با اندازه حرکت زاویه ای کوچک مدری است که در آن ذره گردان مدت زمان زیادی را در هر دور، نزدیک به مرکز نیرو، صرف می کند؛ حال آنکه مدار با اندازه حرکت زاویه ای بزرگ مداری است که در آن ذره گردان همواره از مرکز نیرو دور است. وضع مکانیک موجی متناظر نیز چنین است: با بررسی توابع موجی که از معادله شرودینگر به دست می آیند در می یبیم که به ازای مقدار مفروضی از n (یا انرژی کل)، احتمال آنکه یک الکترون در هسته یا بدان نزدیک باشد، برای حالتی که اندازه حرکت زاویه ای کم است (l کوچک) بیشتر از حالتی است که اندازه حرکت زاویه ای زیاد (l بزرگ) است.

شباهت مدل کلاسیکی سیاره ای با نظریه کوانتومی اینست که برای یک مقدار انرژی کل دستگاه مقید مقادیر متفاوتی برای اندازه حرکت زاویه ای مداری بدست می آید ولی تفاوت این دو مدل در اینست که در نظریه کلاسیکی هیچ محدودیتی برای مقادیر ممکن اندازه حرکت زاویه ای قائل نیست در حالیکه نظریه کوانتومی آنها را به مقادیر گسسته محدود می کند.

اثر این گسیختگی مقادیر اندازه حرکت زاویه ای، در گذرهای اتمی نیز ظاهر می شود. با توجه به اینکه فوتون دارای اندازه حرکت ذاتی (اسپینی) یک است؛ و با توجه به پایستگی اندازه حرکت زاویه ای کل، این گذرها تنها به گذار بین حالتهایی که در آنها $\Delta l \neq \pm 1$ باشد، گذارهای ممنوع می باشد. بنابراین قاعده گزینش برای گذارهای مجاز به صورت $\Delta l = \pm 1$ می باشد.

مثال:

الکترونی در اتم هیدروژن دارای اعداد کوانتومی l=3 , m_l=+2 است. طول بردار تکانه زاویه ای مؤلفه z آن یعنی L_Z چقدر است؟

جواب: گفتیم طول بردار تکانه زاویه ای و مؤلفه z آن از روابط زیر به دست می آیند:

$$L = \sqrt{l(l+1)}h \quad , \quad L_z = m_l h$$

بنابراین داریم:

$$L = \sqrt{2(2+1)}h = \sqrt{12}h \ , \ L_z = 2h$$

مثال:

الکترون اتم هیدروژن را در حالت n=7 , l=5 در نظر بگیرید. در این صورت طول بر در تکانه زاویه ای مداری الکترون طبق نظریه بوهر و شرودینگر را بیابید؟

جواب: طول بردار تکانه زاویه ای طبق نظریه بوهر برابر است با:

$$L=nh \rightarrow L=7h$$

و طول بردار تکانه زاویه ای طبق نظریه شرودینگر عبارت است از:

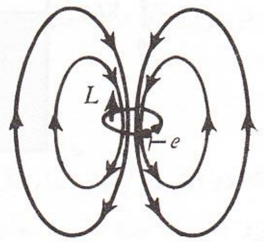
$$L = \sqrt{l(l+1)}h \quad \rightarrow \quad L = \sqrt{5(5+1)}h = \sqrt{302}h$$

۵-۳ کوانتش فضایی(گشتاور الکترومغناطیسی هسته)

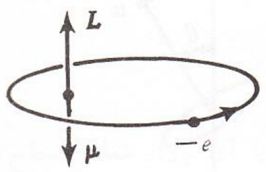
در مدل سیاره ای کلاسیک، انرژی کل، بزرگی اندازه حرکت زاویه ای مداری، و مؤلفه اندازه حرکت زاویه ای مداری در امتداد هر راستایی از فضا، ثابتهای حرکت اند. در مکانیک موجی انرژی یک اتم تک الکترونی کوانتیده است و با عدد کوانتومی اصلی n مشخص می شود. اندازه حرکت زاویه ای مداری این اتم نیز کوانتیده است و مقادیر ممکن آن به مقدار عدد کوانتومی اندازه حرکت زاویه ای مداری، در امتداد یک راستای ثابت از فضا کوانتیده است و با عدد کوانتومی m مشخص می شود. این کوانتش اضافی، که می توان آن را به طور صوری در مکانیک موجی به دست آورد؛ رابطه نزدیکی با اثرهای مغناطیسی در اتمها دارد.

اثرهای مغناطیسی وابسته به یک ذره کلاسیکی در حال دوران و باردار را در نظر می گیریم. اندازه حرکت زاویه ای مداری L ذره ای که در مداری بسته ای حرکت می کند با بردارهای نمایش داده می شود که بر صفحه مدار عمود است. یک بار الکتریکی منفی گردان یک حلقه جریان الکتریکی را تشکیل می دهد و همان طور که در شکل ۵-۷ نشان داده شده است، یک میدان مغناطیسی به آن وابسته است. اسپن میدان مغناطیسی در هر نقطه با بزرگی جریان متناسب است. پیکربندی میدان مغناطیسی مانند پیکربندی یک آهنربای دائمی کوچک است و می توان به الکترون گردان یک گشتاور دو قطبی مغناطیسی μ نسبت داد.

جهت μ بر صفحه حلقه الکترون عمود است و از طریق قاعده پیچ دست راست به جهت حرکت بار مثبت چرخان مربوط می شود. از این رو، همان طور که در شکل ۵-۸ نشان داده شده است، برار اندازه حرکت زاویه ای L یک ذره با بار منفی و گشتاور مغناطیسی μ آن در دو جهت مخالف قرار دارند. می خواهیم ثابت تناسب بین بزرگهای $L\ ,\ \mu$ را پیدا کنیم.



شکل ۵-۷: میدان مغناطیسی یک دو قطبی مغناطیسی، شامل یک بار الکتریکی منفی گردان.



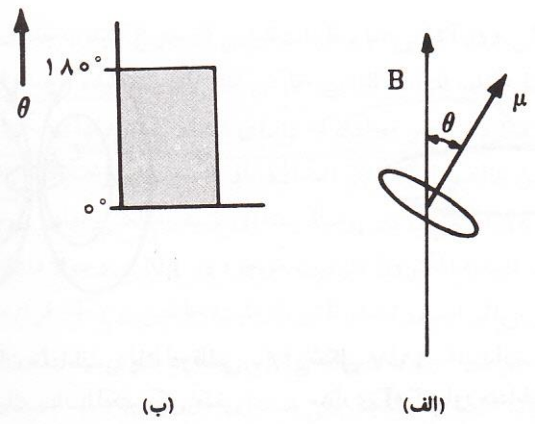
شکل۵-۸: اندازه حرکت زاویه‌ای مداری L و گشتاور مغناطیسی μ یک الکترون در حال دوران.

گشتاور مغناطیسی μ در میدان مغناطیسی B را می توان با روابط

$$\tau = \mu \times B$$
$$\Delta E_m = -\mu . B$$

تعریف کرد، که در آن τ گشتاور نیروی مغناطیسی است که می خواهد μ را در امتداد B قرار دهد و ΔE_m تغییر در انرژی پتانسیل مغناطیسی دو قطبی در میدان خارجی همان طور که در شکل ۵-۹ الف نشان دادن زاویه بین $\mu\ ,\ B$ با θ ، می توان آخرین معادله را به صورت زیر نوشت:

$$\Delta E_m = -\mu B\, cos\theta$$



شکل ۵-۹: دو قطبی مغناطیسی در میدان مغناطیسی؛ (الف) جهتهای نسبی $\mu\ ,\ B$؛ (ب) جهت‌های مجاز در فیزیک کلاسیک.

وقتی که دو قطبی در امتداد میدان خارجی قرار دارد و θ صفر است، ΔE_m با $-\mu B$ برابر و کمینه است. وقتی روی دو قطبی کار انجام می شود و آن را طوری بچرخاند که در جهت خلاف B قرار گیرد و θ برابر با ۱۸۰ شود، آنگاه ΔE_m با $+\mu b$ برابر و بیشینه است. همان طور که در شکل ۵-۹ ب نشان داده شده است، می دانیم که در فیزیک کلاسیک کلیه جهت های دو قطبی، بین ۰ و ۱۸۰ قرار دارند و، بنابراین، تمامی انرژیهای بین $-\mu B$ و $+\mu b$ مجازند.

بزرگی گشتاور مغناطیسی یک جریان الکتریکی i که در محیط یک حلقه در صفحه ای به مساحت A جریان دارد با

$$\mu = iA$$

داده می شود. هنگامی که ذره ای با بار e حلقه ای را در مدت زمان T دور بزند جریان برابر با $i=e/T$ است، در آن صورت معادله بالا را می توان به صورت زیر نوشت

$$\mu = \frac{eA}{T}$$

اندازه حرکت زاویه ای مداری L، نسبت به مرکز نیرو، برای ذره ای به جرم m که تحت تأثیر یک نیروی مرکزی (مانند نیروی کولنی بین ذرات) حرکت می کند ثابت باقی می ماند و عموماً می توان آن را به صورت

$$L = 2m\frac{dA}{dt}$$

نوشت، که در آن dA/dt نمایشگر آهنگی است که با آن بردار شعاعی سطح A را از مرکز نیرو به سمت ذره متحرک جاروب می کند و m جرم الکترون است (این مطلب صرفاً قانون دوم کپلر در حرکت سیاره ای است). طی زمان T (یک چرخه کامل) سطح جاروب شده برابر A است؛ در این صورت، $dA/dt=A/T$ است. با قرار دادن این نتیجه در آخرین معادله داریم

$$L = \frac{2mA}{T}$$

سرانجام، از ترکیب روابط بالا نتیجه می شود

$$\mu = -\frac{e}{2m}L$$

در اینجاعلامت منفی به دلیل مختلف الجهت بود بردارهای گشتاور مغناطیسی و اندازه حرکت زاویه ای آمده است. ملاحظه می کنیم که μ مستقیماً با L متناسب است. ثابت تناسب، $-e/2m$ ، همان ثابتی است که می خواستیم پیدا کنیم و معمولاً به نسبت ژیرو مغناطیسی موسوم است.

با وجود آنکه تجسم ارتباط بین اثرهای مغناطیسی و اندازه حرکت زاویه ای بر حسب یک مدار الکترونی مشخص غیرممکن است، مکانیک موجی دقیقاً همان رابطه فیزیک کلاسیک را برای نسبت ژیرومغناطیسی یک الکترون، در یک اتم با اندازه حرکت زاویه ای مداری $L=[l(l+1)]^{1/2}h$ به دست می دهد. چون L به عدد کوانتومی اندازه حرکت زاویه ای مداری l بستگی دارد، پس گشتاور مغناطیسی بستگی دارد، پس گشتاور مغناطیسی بستگی دارد، پس گشتاور مغناطیسی μ نیز باید به l بستگی داشته باشد، با قرار دادن رابطه $L = \frac{2mA}{T}$ در رابطه $\mu = -\frac{e}{2m}L$ داریم

$$\mu_1 = \frac{e}{2m}\sqrt{l(l+1)}h$$

که در آن شاخص پایین نشاندهنده گشتاور مغناطیسی وابسته به l است.

اکنون تغییر در انرژی پتانسیل مغناطیسی ΔE_m یک اتم را، هنگامی که این اتم با گشتاور مغناطیسی μ_1 در یک میدان مغناطیسی خارجی با چگالی شار B قرار می گیرد، بررسی می کنیم. با ترکیب روابط بالا و با فرض اینکه در حالت θ به جای μ , B، زاویه بین L , B باشد داریم

$$\Delta E_m = \frac{e}{2m}\sqrt{l(l+1)}B\cos\theta$$

از این رو، هنگامی که اتم در میدان مغناطیسی خارجی قرار بگیرد، انرژی آن به زاویه θ بین بردار اندازه حرکت زاویه ای مداری و میدان خارجی بستگی دارد. اگر هیچ محدودیتی برای زاویه θ وجود نمی داشت، مؤلفه اندازه حرکت زاویه ای مداری، در جهت میدان مغناطیسی، می توانست هر مقداری را بین مثبت و منفی $[l(l+1)]^{1/2}h$ اختیار کند؛ و همین طور، طبق رابطه بالا، ΔE_m می توانست هر مقداری را بین مثبت و منفی

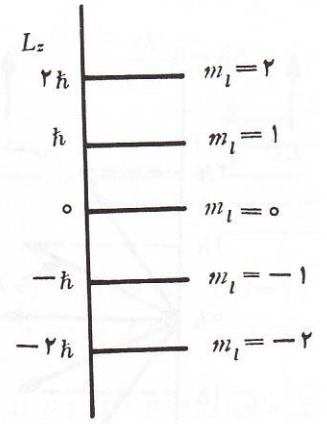
$$B[l(1+1)]^{1/2}(eh/2m)$$

بپذیرد. به طور خلاصه، اگر هیچ قاعده محدود کننده ای، همچون کوانتومی شدن مقادیر L در جهت میدان، وجود نداشت پیوستاری از انرژیهای ممکن وجود می داشت و این کاملاً خلاف وضعی است که تا کنون در دستگاههای اتمی مقید برقرار بوده است. در این صورت خطوط گسیلی از اتمهایی با گشتاورهای مغناطیسی و واقع در میدانهای مغناطیسی به طور پیوسته پهن می شدند و به خطوط گسسته تجزیه نمی شدند.

در سال ۱۸۹۶/۱۲۷۵ خطوط گسیلی از اتمهای واقع در یک میدان مغناطیسی خارجی قوی توسط زیمان مورد مطالعه قرار گرفت. نخست او دریافت که با اعمال میدان این خطوط پهن شدند؛ اما به کمک یک دستگاه با توان تفکیک بالاتر، وی دریافت که در واقع این خطوط شکافته می شوند و شامل دو یا چند خط تیز نزدیک به هم هستند. این شکافتگی خط طیفی به مؤلفه های گسسته، توسط یک میدان مغناطیسی، به اثر زیمان معروف است. این اثر را در پدیده مکانیک موجی معروف به کوانتش فضایی بهتر می توان درک کرد.

در مکانیک موجی بردار اندازه حرکت زاویه ای مداری L نمی تواند هر جهتی را نسبت به یک میدان مغناطیسی خارجی اختیار کند، بلکه محدود به آن جهتهای بخصوصی است که برای آنها مؤلفه بردار اندازه حرکت زاویه ای مداری، در راستای میدان مغناطیسی، مضرب درستی از h باشد. جهت میدان مغناطیسی خارجی را هم جهت با Z اختیار می کنیم. مقادیر ممکن مؤلفه Z بردار L(شکل ۵-۱۰) از قاعده زیر به دست می آیند.

$$L_z=m_lh$$



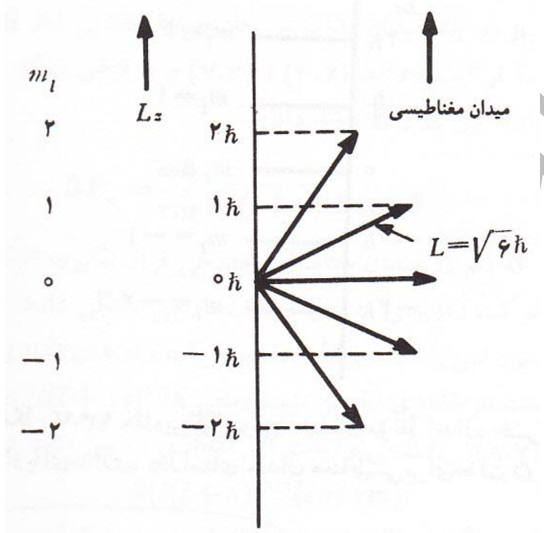
شکل۵-۱۰ مقادیر کوانتومی مجاز مولفه اندازه حرکت زاویه‌ای مداری، در راستای میدان مغناطیسی برای حالت D

که در آن m_l، عدد کوانتومی مغناطیسی مداری، می تواند به ازای یک مقدار مفروض از l مقادیر درست

$$m_l=l\ ,\ l-1\ ,\ l-2\ ,\ \dots\ ,\dots\ ,\ -l$$

را اختیار کند. همان طور که رابطه بالا نشان می دهد (از کوانتیده بودن L_z) برای هر مقدار l، $2l+1$ حالت کوانتومی مجزا وجوددارد.به عنوان مثال،در حالت D با $l=2$، مقادیر ممکن m_l عبارت‌اند از $+1$, 0, -1, -2, $+2$. آنگاه در این حالت، مؤلفه L_z می تواند تنها مقادیر $2h$, $1h$, 0 , $-1h$, $-2h$ را اختیار کند، حال آنکه بزرگی L برابر با $\sqrt{6}h$ است. شکل ۵-۱۱، ۵ راستای ممکن بردار اندازه حرکت زاویه ای مداری را، نسبت به محور دلبخواه z، نشان می دهد (این شکل را با شکل ۵-۴ مقایسه کنید). چون بردار اندازه حرکت زاویه ای محدود به راستاهای گسسته معینی در فضاست، به آن کوانتیده فضایی گفته میشود. به علاوه، چون L_z با $L\cos\theta$ برابر است، قاعده حاکم بر راستای بردار L، یعنی قاعده کوانتش فضایی، به صورت زیر است

$$\cos\theta=\frac{m_\ell}{\sqrt{l(l+1)}}Z$$



شکل ۵-۱۱ کوانتش فضایی بردار اندازه حرکت زاویه ای مداری L برای حالت D

ملاحظه می‌کنیم که مؤلفه بیشینه L، در راستای کوانتش فضایی، $L_z=1h$ همواره از بزرگی آن، $L=[l(l+1)]^{1/2}h$، کمتر است. بردار اندازه حرکت زاویه ای مداری هرگز نمی تواند به طور کامل در جهت میدان مغناطیسی خارجی یا در جهت خلاف آن قرار بگیرد. در مکانیک موجی تعیین دقیق بزرگی L و مؤلفه Z مجاز است اما، به طور پارادوکس، تعیین دقیق مؤلفه های X , Y بردار L مجاز نیست. معمولاً بردار L را برداری در نظر می گیرند که حول محور Z، در زاویه ثابت θ، حرکت تقدیمی انجام می دهد و برای هر مقدار مجاز بخصوصی از m_l، یک مخروط رسم می شود؛ به همین دلیل است که بزرگی برداری L و مؤلفه Z آن معلوم ولی مؤلفه های X , Y آن نامعلوم اند.

مثال:

الکترونی دارای اعداد کوانتومی $n=3$, $l=1$ است. زاویه های تکانه زاویه ای l با محور z را بیابید.

$$L=1 \rightarrow -l\leq m_l\leq +l \rightarrow m_l=-1\,,0\,,1$$

$$\cos\theta=\frac{m_l}{\sqrt{l(l+1)}} \rightarrow \cos\theta=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \theta=45\\ 0 \rightarrow \theta=30\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \theta=145\end{cases}$$

مثال:

گشتاور مغناطیسی الکترونی را که روی یک مدار دایره ای به شعاع r حول هسته حرکت می کند بیابید.

جواب:

$M=IA=(ef)(\pi r^2)$

برای معادله حرکت الکترون داریم:

$$f_{rad} = ma_{rad} \rightarrow \frac{ke^2}{r} = \frac{mv^2}{r}$$

$$f = \frac{U}{2\pi r} = \frac{1}{2a}\sqrt{ke/mr} \rightarrow$$

$$M = \pi er^2\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{ke}{mr}}\right) = \frac{e^2}{2}\sqrt{kr/m}$$

مثال:

بسامدی را حساب کنید که تحت آن گشتاور مغناطیسی مداری الکترون μ در میدان مغناطیسی B حرکت تقدیمی می کند.

جواب: برای یک گشتاور مغناطیسی که یک میدان مغناطیسی، را تجربه می کند داریم:

$$\tau = \mu \times B = -\frac{e}{2m} L \times B$$

این گشتاور باعث تغییری در اندازه حرکت زاویه ای می شود.

$$\tau = \frac{dL}{dt} = -\frac{e}{2m} L \times B$$

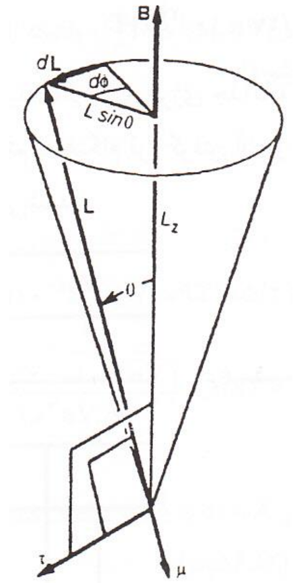
تغییر در L، Dl هم بر L هم بر B عمود است، که منجر به حرکت تقدیمی L حول جهت B می شود، از شکل دیده می شود که:

$$d\emptyset = \frac{|dL|}{L\sin\theta}$$

که از آن:

$$\omega_p = \frac{d\emptyset}{dt} = \frac{\left|\frac{dL}{dt}\right|}{L\sin\theta} = \frac{\frac{e}{2m}LB\sin\theta}{L\sin\theta} = \frac{e}{2m}B$$

این حرکت تقدیمی لارمور نامیده می شود، ω_p برابر با اختلاف بسامد مشاهده شده در اثر بهنجار زیمان است.



مثال:

با استفاده از نتایج مکانیک کوانتومی، مقادیر ممکن گشتاور مغناطیسی را تراز *n=3* محاسبه کنید.

جواب: برای $n=3$، مقادیر ممکن l عبارتند از $0,1,2$ ؛ $L=\sqrt{l(l+1)}h$ برای $l=2$.

$$\mu=\frac{e}{2m}L=\frac{eh}{2m}\sqrt{l(l+1)}=\left(0/927\times10^{-23}\frac{J}{T}\right)\sqrt{2(2+1)}=2/27\times10^{-23}\frac{J}{T}$$

برای $l=1$:

$$\mu=\frac{eh}{2m}\sqrt{l(l+1)}=\left(0/927\times10^{-23}\frac{J}{T}\right)\sqrt{2}=1/32\times10^{-23}\frac{J}{T}$$

برای $l=0$, $\mu=0$.

توجه کنید که این نتایج با آنچه نظریه بور پیش بینی می کند ناسازگار هستند. از نظریه بور داریم $L=nh$، بنابراین:

$$\mu_B=\frac{e}{2m}L=\frac{e}{2m}3(h)=3\left(\frac{eh}{2m}\right)\left(\frac{0}{927}\times10^{-23}\frac{J}{T}\right)\sqrt{2}=2/78\times10^{-23}\frac{J}{T}$$

سوال: برای عدد کوانتومی n=4، عدد کوانتومی مغناطیسی، چند مقدار متفاوت می تواند اختیار کند؟ (ارشد ۹۴)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۷ ۴) ۱۶

$n=4\rightarrow l=0,1,2,3$, $m_l=l, l-1, l-2, \dots, 0, \dots, -l$

$l=0 \rightarrow m_l=0$

$l=1 \rightarrow m_l=1, 0, -1$

$l=2 \rightarrow m_l=2, 1, 0, -1, -2$

$l=3 \rightarrow m_l=3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$

پاسخ: گزینه (۳) صحیح است.

۵-۴ اثر بهنجار زیمان

پیتر زیمان، فیزیکدان دانمارکی، در سال ۱۸۹۶ پیش از پیدایش مکانیک کوانتومی آزمایشی انجام داد و در آن آزمایش اثرهای برهمکنش میان گشتاور مغناطیسی داخلی اتم و میدان مغناطیسی خارجی را اندازه گیری کرد. در آزمایش زیمان، اتم را در یک میدان مغناطیسی خارجی قرار می دهند و طیف برانگیختگی آن را اندازه گیری و با طیف آن در غیاب میدان مغناطیسی خارجی مقایسه می کنند. این کار را می شد برای مثال با اندازه گیری طول موجهای تابش گسیل شده از یک لوله تخلیه الکتریکی هنگامی که لوله در یک میدن مغناطیسی قرار داده می شود، انجام داد.

وقتی آزمایش انجام می شود، در می یابیم که در حضور میدان خارجی، هر یک از خطهای طیفی به تعدادی خط گسسته شکافته می شوند. علاوه بر این، تغییر مشاهده شده در بسامد خطوط با بزرگی میدان مغناطیسی اعمال شده نسبت مستقیم دارد. مشاهده خطهای طیفی اضافی به این معنی که وقتی یک اتم در یک میدان مغناطیسی خارجی قرار می گیرد، دارای ترازهای انرژی گسسته اضافی می شود.

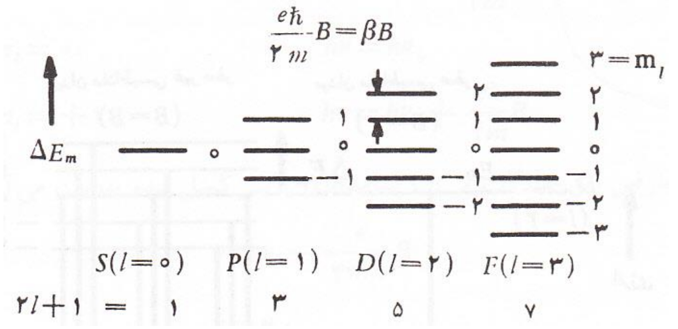
برای توضیح شکافتگی زیمان باید تحلیل مکانیک موجی را به کار ببریم. از این تحلیل نتیجه می شود که بزرگی و جهت تکانه زاویه ای مداری هر دو کوانتیده هستند.

چنانچه سمتگیری بردار اندازه حرکت زاویه ای کوانتیده باشد، در آن صورت راستاهای ممکن گشتاور دو قطبی مغناطیسی وابسته μ_l و نیز انرژی پتانسیل مغناطیسی ΔE_m این حالت نیز کوانتیده اند. با قرار دادن مقدار $cos\theta$ یعنی قاعده کوانتس فضایی، در رابطه معادله تغییر انرژی برای حالتی با اعداد کوانتومی l , m_l، داریم

$$\Delta E_m = m_l \frac{eh}{2m} B$$

شکل ۵-۱۲تغییرات انرژی حالتهای F, D, P, S را که به ترتیب دارای زیرترازهای مغناطیسی ۱، ۳، ۵ و ۷ هستند نشان می دهد؛ به طور کلی به ازای مقدار معینی از l تعداد مولفه های زیمان برابر $2l+1$ است. اختلاف انرژی بین زیرترازهای مغناطیسی مجاور برابر $2l+1$ است. اختلاف انرژی بین زیرترازای مغناطیسی مجاور برابر $(eh/m)B$ و از مقدار l مستقل است. کمیت $eh/2m$ دارای یکای گشتاور مغناطیسی است؛ این کمیت مگنتون بوهر β نامیده می شود، زیرا β گشتاور مغناطیسی یک الکترون کلاسیک است که با شعاع اولین مدار بوهر به دور هسته هیدروژن دوران می کند

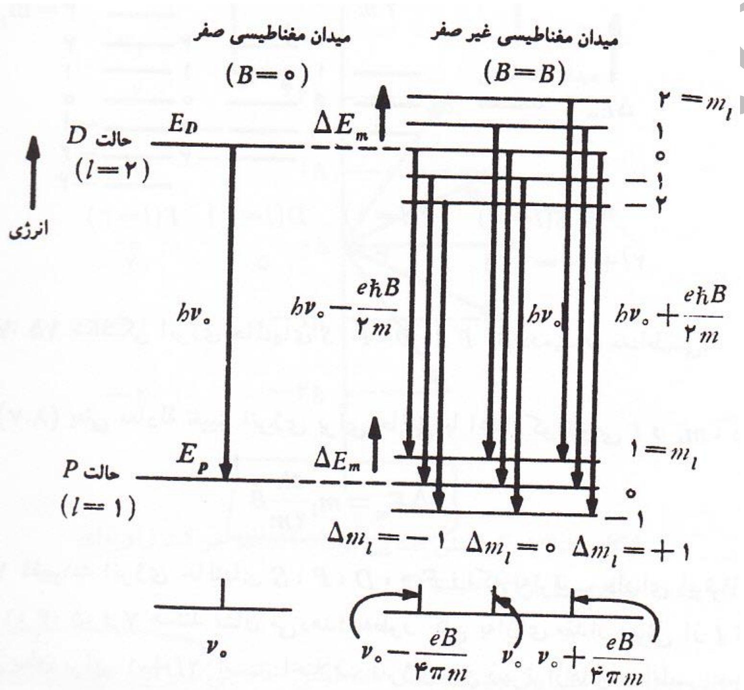
$$\beta = \frac{eh}{2m} = 0/9273 \times 10^{-23} J/T \text{ مگنتون بوهر}$$



شکل ۵-۱۲: شکافتگی انرژی حالتهای S، D و F اتم در میدان مغناطیسی

طیف خطوط گسیل شده از اتمهای برانگیخته در گذارهای بین حالتهای P , D را در حضور یک میدان مغناطیسی در نظر می گیریم (شکل ۵-۱۳). وقتی که B صفر است، انرژی حالت D برابر E_D (برای تمام پنج مقدار m_l) و انرژی حالت P برابر E_P(برای تمام سه مقدار m_l) است، و فوتونهایی که دارای تک بسامد v_0 هستند، طبق رابطه$hv_0=E_D-E_P$ گسیل می شوند. وقتی میدان برقرار شود حالت D به پنج زیرتراز مغناطیسی هم فاصله و حالت P به سه زیرتراز مغناطیسی هم فاصله تجزیه می شوند و اختلاف در انرژی بین هر دو زیر تراز مغناطیسی مجاور، برابر $(eh/2m)B$ است. گذارهای بین حالت $(l=2)D$ و حالت $(l=1)P$ از قاعده گزینش $\Delta l=\pm 1$ پیروی می کنند؛ این قاعده گزینش برای گذارهای بین زیرترازهای مغناطیسی به صورت زیر است

$\Delta m_l=0$ یا ± 1



شکل۵-۱۳: ترازهای انرژی و طیفهای گذار $D\rightarrow P$ (چپ) میدان مغناطیسی صفر (راست) میدان مغناطیسی غیرصفر، اثر بهنجار زیمان.

یعنی، تنها آن گذارهایی مجازند که در آنها عدد کوانتومی m_l یا تغییر نمی کند و یا به اندازه واحد تغییر می کند. گذارهای مجاز طیف خطوط گسیل شده، در شکل ۵-۱۳نشان داده شده اند، می توان مشاهده کرد که اختلافهای hv برای گذارهای مجاز، یکی از سه مقدار ممکن زیر را اختیار می کنند

$$\Delta m_l = -1: \qquad hv = hv_0 - \frac{eh}{2m}B$$

$$\Delta m_l = 0: \qquad hv = hv_0$$

$$\Delta m_l = +1: \qquad hv = hv_0 + \frac{eh}{2m}B$$

از تقسیم طرفین این معادلات بر h، بسامدهای تابش گسیل شده به دست می آیند

$$v = v_0 - \frac{eh}{4\pi m}B$$

$$v = v_0$$

$$v = v_0 + \frac{e}{4\pi m}B$$

از این رو، هر خط در طیف توسط یک میدان مغناطیسی خارجی به سه مؤلفه هم فاصله شکافته می شود: خط اصلی با بسامد v_0 و دو خط ماهواره ای هم فاصله آنها $(e/4\pi m)B$ از v_0 با میدان مغناطیسی B متناسب است. می بینیم که برای یک میدان مغناطیسی نسبتاً قوی، مثلا $B=1/0Wb/m^2(10000G)$، اختلاف در انرژی بین ترازهای مجاور زیمان فقط $5/8\times10^{-5}Ev$ یا $9/3\times10^{-24}J$ است. چون اختلاف نوعی بین ترازهایی که باعث گسیل در ناحیه مرئی طیف می شوند چند الکترون ولت است، وقتی یک میدان مغناطیسی قوی برقرار شود، انرژی، بسامد، یا طول موج، کمتر از ۱ در ۱۰۰۰ تغییر می کنند. به همین دلیل است که مشاهده اثر زیمان به طیف سنجهایی با توان تفکیک نسبتاً بالا نیاز دارد.

شکل ۵-۱۳ ترازهای انرژی و گذارهای مجاز بین حالت D و حالت P را نشان می‌دهد. مقدار ΔE_m و قواعد گزینش حاکم بر m_l، هر دو مستقل از l اند؛ بنابراین

تمامی گذارهایی که برای آنها Δl برابر با ±1 است منجر به زیمان یکسان خواهند شد؛ یعنی، سه خط مؤلفه ای هم فاصله زیمان.

این بیان را اثر بهنجار زیمان می گویند و شکافتگیهای مشاهده شده مربوط به بعضی خطوط از برخی عناصر، مانند کلسیم و جیوه، با طیفی که در شکل نشان داده شده است کاملاً توافق دارند. از طرف دیگر، طیفهای بیشتر عناصر اثر بهنجارزیمان را نشان می‌دهند؛ در آن طیفها بزرگی شکافتگیها و تعداد مؤلفه‌های زیمان با نظریه‌ای که در اینجا ارائه شد مطابقت ندارد. به این طیفهای زیمان بی هنجار گفته می‌شود ، زیرا نمی‌توانند تابش گسیل شده را به سادگی بر حسب کوانتش فضایی بردار اندازه حرکت زاویه‌ای مداری و اثرهای مغناطیسی وابسته به آن توضیح دهند.

ملاحظه می‌کنیم که اختلاف بسامد $(e/4\pi m)B$ در رابطه بالا، ثابت کوانتومی h را شامل نمی شود. این مطلب حاکمی از آن است که این اختلاف مشخصاً نمی تواند یک اثر کوانتومی باشد. اثر به اصطلاح بهنجار زیمان را می توان بر اساس یک محاسبه دقیقاً کلاسیکی به دست آورد.

قاعده کوانتش فضایی، که مقدار مؤلفه اندازه حرکت زاویه ای مداری را در هر جهتی از فضا به مضربهای درستی از h محدود می کند، خواه میدان مغناطیسی اعمال شود و خواه نشود، برقرار است. هنگامی که میدان مغناطیسی اعمال می شود جهت آن جهت کوانتش فضایی را مشخص می کند، و انرژیهای چندین حالت بر حسب مقدار m_l با هم فرق می کنند. وقتی میدان مغناطیسی قطع شود کوانتش فضایی پابرجا می ماند؛ ولی در این حالت انرژی حالتهای متناظر با چندین مقدار ممکن m_l، همگی یکسان اند. بنابراین در غیاب میدان مغناطیسی، هر حالت با عدد کوانتومی اندازه حرکت زاویه ای مداری l دارای $2l+1$ زیر حالت است که هم انرژی آنها یکسان است، ΔE_m، و هم بزرگی اندازه حرکت زاویه ای مداری آنها، $[l(l+1)]^{1/2}h$؛ ولی در مؤلفه بردار اندازه حرکت زاویه ای (m_lh) در جهتی از فضا، اختلاف درند. از این رو، در غیاب میدان مغناطیسی یک واگنی $(2l+1)$ تایی در انرژی حالتها برای هر مقدار ویژه از l وجود دارد.

نکته: اثر بهنجار زیمان را می توان بر اساس یک محاسبه دقیقاً کلاسیکی یدست آورد یعنی این اثر کاملاً کلاسیکی است در حالی که اثر بی هنجار زیمان که در اینجا در مورد آن بحث نمی کنیم کوانتومی است.

نکته: توجه کنیم که قبل از اعمال میدان مغناطیسی برای هر حالت با عدد کوانتومی اندازه حرکت زاویه ای مداری l یک واگنی $2l+1$ تایی وجود دارد و بعد از اعمال میدان مغناطیسی این واگنی تا حدودی از بین می رود.

مثال:

در اثر بهنجار زیمان در میدان مغناطیسی ۳/۱۴ تسلا اختلاف فرکانس بین فوتون های گسیلی متناسب با گذار از زیر ترازهای مغناطیسی مجاور ($\Delta m=l$) به حالت نهایی یکسان تقریباً چند هرتز است؟

جواب: با توجه به اثر بهنجار زیمان داریم:

$$B = 3/14T\ , m_e = 9\times10^{-31}kg\ \ ,\ \ \Delta m = 1$$

چون $\Delta m = 1$ می باشد لذا اختلاف فرکانس بین فوتون های گسیلی متناظر با گذار از زیر ترازهای مغناطیسی مجاور به حالت نهایی یکسان برابر است با:

$$\Delta E = \frac{eBh}{2m_e}\ , E = h\nu \ \rightarrow\ \Delta E = h\Delta\nu\ \rightarrow\ \ h\Delta\nu = \frac{eBh}{4\pi m_e}$$

$$\Delta\nu = \frac{eB}{4\pi m_e} = \frac{1/6\times10^{-19}\times3/14}{(4)(3/14)(9\times10^{-31})} = \frac{4}{9}\times10^{11} \approx 4/4\times10^{10}Hz$$

مثال:

با قرار دادن اتم هیدروژن در میدان مغناطیسی ثابت خط طیفی مربوط به $n=2$ به چند خط تجزیه می شود؟ (اثر زیمان عادی)

جواب: گفتیم تراز با عدد کوانتومی تکانه زاویه ای l به $2l+1$ خط شکافته می شود پس داریم:

$$n=2\ ,\ n\geq l+1\ \rightarrow\ \ l\leq1\ \rightarrow\ \ l=1\ ,\ l=0$$

$$\rightarrow\begin{cases} l=1 & \rightarrow \quad 2l+1=3 \\ l=0 & \rightarrow \quad 2(0)+1=1 \end{cases}$$

ولی توجه کنید که داریم:

$$\begin{cases} l=1 & \rightarrow \quad m_l=-1,0,1 \\ l=0 & \rightarrow \quad m_l=0 \end{cases}$$

$M_l=0$ یک مقدار تکراری است که باید یک مقدار آن را به حساب آوریم پس تراز به ۳ زیر تراز شکافته می شود.

مثال:

شکافتگی بهنجار زیمان خط سرخ کادمیوم به طول موج $6438A$ ا هنگامی که اتم کادمیوم در میدان مغناطیسی $0/009T$ قرار می گیرد، تعیین کنید.

جواب: با دیفرانسیل گیری از طرفین رابطه $E = \frac{hc}{\lambda}$، تغییر در طول موج به دست می آید:

$$dE = -hc\frac{d\lambda}{\lambda^2} \text{ یا } |d\lambda| = \frac{\lambda^2|dE|}{hc}$$

جابه جایی انرژی به دست می آید:

$$|dE| = \Delta E_{zee} = \frac{eh}{2m} B = \left(5/79 \times 10^{-5} \frac{eV}{T}\right)(T) = 5/21 \times 10^{-7} eV$$

که از آن نتیجه می شود:

$$|d\lambda| = \frac{\lambda^2 |dE|}{hc} = \frac{(6438A)^2 (5/21\times10^{-7} eV)}{12/4\times10^3 eV.A} = 1/74 \times 10^{-3} A$$

مثال:

اگر یک طیف سنج بتواند در ناحیه مرئی (مثلاً طول موج *500A*)خطهای طیفی ای را که به اندازه *0/5A* از هم قرار دارند تفکیک کند، برای مشاهده اثر بهنجار زیمان چه چگالی شار مغناطیسی *B* ای لازم است؟

جواب: داریم:

$$\frac{|d\lambda|}{\lambda} = \frac{|dE|}{\frac{hc}{\lambda}} = \frac{\left(\frac{eh}{2m}\right)^B}{\frac{hc}{\lambda}}$$

که از نتیجه می شود:

$$B = \frac{|d\lambda|}{\lambda}\left(\frac{hc}{\lambda}\right)\left(\frac{2m}{eh}\right) = \left(\frac{0/5A}{5000A}\right)\left[\frac{12/4\times10^3 eV.A}{5000A}\right]\left[\frac{1}{5/79\times10^{-5}\frac{eV}{T}}\right]$$
$$=2/28T$$

مثال:

در آزمایش بهنجار زیمان، خط طیفی کلسیم به طول موج *4226A* در میدان مغناطیسی *3T* به سه خط که هر کدام به فاصله *0/25A* از خط مجاور قرار دارد، شکافته می شود. نسبت $\frac{e}{m}$ برای الکترون را از این داده ها تعیین کنید.

جواب:$\left(\hbar = \frac{h}{2\pi}\right)$:

$$\frac{|d\lambda|}{\lambda} = \frac{\left(\frac{e}{4\pi m}\right)^B}{\frac{c}{\lambda}}$$

نسبت $\frac{e}{m}$ را از معادله بالا به دست می آوریم:

$$\frac{e}{m} = \frac{4\pi}{B}\left(\frac{c}{\lambda^2}\right)|d\lambda| = \frac{3\pi}{3T}\left[\frac{3\times10^8 m/s}{(4226\times10^{-10}m)}\right](0/25\times10^{-10}m) = 1/76\times10^{11}\frac{c}{kg}$$

مثال

در اتمی واقع در میدان مغناطیسی *0/6T*، میان حالتهای *l=2 , l=1* گذارهایی رخ می دهند. اگر طول وج یک خط طیفی پیش از اعمال میدان خارجی ۵۰۰۰*A* باشد، طول موجهایی را که مشاهده می شوند تعیین کنید.

جواب: اختلاف انرژی میان ترازهای مجاور از رابطه زیر به دست می آید:

$$\Delta E_{zee} = \frac{eh}{2m} B = \left[5/79 \times 10^{-5} \frac{eV}{T}\right](0/6T) = 3/47 \times 10^{-5} eV$$

بنابراین،

$$|d\lambda| = \frac{\lambda^2 \Delta E_{zee}}{hc} = \frac{(5000A)^2(3/47\times10^{-5}eV)}{12/4\times10^3 eV.A} = 0/07A$$

گذارها باید از قاعده گزینش $\Delta m_l = +1 , 0 , -1$ تبعیت کنند. از ۹ گذار ممکن تنها سه طول موج مختلف مشاهده می شود:

$$\lambda_- = 4999/93\dot{A} \qquad \lambda_0 = 5000\dot{A} \qquad \lambda_+ = ۵۰۰۰/۰۷\dot{A}$$

سوال: ساختار زیر خطوط بیناب اتم هیدروژن توسط اختلاف در کدام عدد کوانتومی قابل توضیح است؟ (ارشد ۹۰)

۱) اصلی ۲) مغناطیسی ۳) اسپینی ۴) مداری

پاسخ: گزینه (۲) صحیح است.

سوال: هنگامی که هسته‌ای با گشتاور مغناطیسی μ در یک میدان مغناطیسی ثابت B قرار گیرد، کدام یک از حالات زیر را خواهد داشت؟ (h ثابت پلانک، I عدد کوانتومی اسپین)(ارشد ۹۰)

۱) دوران در جهت عمود بر میدان با بسامد μB ۲) حرکت تقدیمی در جهت میدان با بسامد μB

۳) حرکت تقدیمی حول محور B با بسامد $\frac{\mu B}{Ih}$ ۴) حرکت تقدیمی حول محور B با بسامد μB

پاسخ: گزینه (۳) صحیح است.

سوال: تغییر طول موج فوتون ۲P–۱S برای اتم هیدروژن در یک میدان مغناطیسی ۴T چند فرمی است؟ ($\mu_B = ۹/۲۷ \times ۱۰^{-۲۴} \frac{J}{T}$)(ارشد ۸۸)

۱) ۳۴۷/۵ ۲) ۶۹۵ ۳) ۱۳۹۰ ۴) ۲۷۸۰

پاسخ: گزینه (۴) صحیح است

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_u^2}\right) \to \lambda = 1215\text{Å}$$

$$E = \frac{hc}{\lambda}\Delta E = \mu_B B = \Delta\lambda = \frac{\mu_B B \lambda^2}{hc} = 278$$

سوال: گشتاور مغناطیسی الکترونی که بر روی یک مدار به شعاع r حول هسته در حرکت است کدام گزینه است؟ (ارشد ۸۸)

۱) $\frac{۱}{۴}e^۲\sqrt{\frac{m}{Kr}}$ ۲) $\frac{۱}{۲}e^۲\sqrt{\frac{Kr}{m}}$ ۳) $\frac{۱}{۴}e^۲\sqrt{\frac{Kr}{m}}$ ۴) $\frac{۱}{۲}e^۲\sqrt{\frac{m}{Kr}}$

پاسخ: گزینه (۲) صحیح است

$$\mu = \frac{e}{2m} l = \frac{e}{2m} rmv$$

$$F=ma \quad \to \mu = \frac{1}{2}e^2\sqrt{\frac{kr}{m}}$$

۵-۵ اسپین الکترون

در روند مطالعه مکانیک موجی الکترون را ذره‌ای کوانتوم مکانیکی حساب کردیم که با جرم و بار مشخص می شد، امّا از هرگونه خصلت دیگری عاری بود. حالا خواهیم دید که الکترون برخی خصلتهای دیگر هم دارد؛ این ذره دارای اسپین، یا تکانه زاویه ای ذاتی، و گشتاور مغناطیسی است. از دیدگاهی کلاسیکی، وسوسه می شدیم که الکترون را به صورت گوی بیلیارد بسیار ریزی تصور کنیم، و تکانه زاویه ای اسپین را به حرکت چرخشی این گوی بیلیارد حول محورش، تعبیر کنیم، امّا چنین تصویر کلاسیکی ساده و خامکی کلاً گمراه کننده است. از آزمایشهای مربوط به برخورد انرژی بالا می دانیم که ابعاد الکترون کمتر از $10^{-18}m$ است. گوی بیلیاردی با ابعاد باید گشتاور لختی بسیار ناچیزی داشته باشد، و اگر تکانه زاویه ای چرخشی آن قرار بود با اسپین الکترون جور شود، باید با چنان سرعت استوایی بچرخد که تا حدّ ناممکنی زیاد است (خیلی سریعتر از سرعت نور).

برای اینکه به درکی از اسپین دست پیدا کنیم، باید به فرمولبندی پیشرفته ای از مکانیک موجی نسبیتی از اسپین ارائه می کند، اسپین خیلی شبیه تر است به تکانه زاویه ای چرخشی که در داخل یک موج نور قطبیده دایره ای یافت می شود تا به هر نوع چرخش جسم صلب. در موج الکترونی نسبیتی، مانند مورد مربوط به موج نوری قطبیده دایره ای، یک جریان گردشی انرژی و تکانه به دور جهت حرکت موج وجود دارد؛ این جریان به موج یک تکانه زاویه ای می دهد. از اینرو وجود اسپین به جنبه های موجی الکترون وابسته است. در این فصل در خصوص اسپین از دیدگاه پدید شناختی بحث می کنیم، بدون آنکه در باب مکانیسمی که علت آن به حساب می آید، به جستجو بپردازیم. امّا، همواره باید به یاد داشته باشیم که اسپین اساساً یکی از خواص کوانتوم مکانیکی الکترون است.

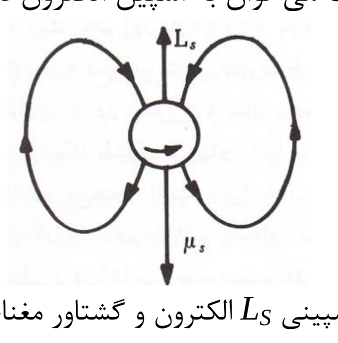
در خصوص یک خاصیت کوانتوم مکانیکی مهّم دیگر الکترونها هم به بحث خواهیم پرداخت؛ تمیزناپذیری کامل آنان و پیامدهای ضمنی این خاصیت برای سیستمی که حاوی چندین الکترون است. خواهیم دید که الکترونها از اصل طرد پیروی می کنند که بنابرآن، وجود بیش از الکترون در یک حالت مداری و اسپینی مفروض ممنوع است.

دیدیم که سه ثابت کلاسیک مربوط به حرکت ذره ای که تحت تأثیر نیروی جاذبه عکس مجذوری قرار دارد، در نظریه کوانتومی، کوانتیده اند. این سه ثابت عبارت اند از انرژی، بزرگی اندازه حرکت زاویه ای مداری، و مؤلفه اندازه حرکت زاویه ای مداری در یک جهت ثابت از فضا. در مکانیک کلاسیک، انرژی ذره ای در یک مدار بیضیوار با اندازه مدار، یعنی با محور بزرگ بیضی مشخص می شود؛ به ازای یک محور بزرگ معلوم، بزرگی اندازه حرکت زاویه ای مداری، با شکل مدار بیضیوار، یعنی با خروج از مرکز مسیر بیضیوار معین می شود, مؤلفه اندازه حرکت زاویه ای مداری، در امتداد جهتی از فضا توسط سمتگیری مدار بیضیوار تعیین می شود. در مکانیک کوانتومی به این ثابتهای حرکت اعداد کوانتومی m_l , l , n نسبت داده می شوند. در این بخش چهارمین و در عین حال آخرین عدد کوانتومی s را که به مفهوم اسپین الکترون مربوط می شود، معرفی می کنیم.

دیدیم که قویترین گسیل از سدیم از گذار $3P\rightarrow 3S$ ناشی می شود. هنگامی که این تابش با طیف سنجی که توان تفکیک آن نسبتاً بالاست بررسی شود مشاهده می‌شود که این گذار با دو خط زرد نزدیک بدهم (در $5890\mathring{A}$, $5896\mathring{A}$) به نام خطوط D سدیم مطابقت دارد. در واقع، هر یک از خطوط طیفی سدیم ساختارریزی را نشان می دهند: برای هرگذاری ، در واقع دو یا سه خط مشخص و مجزا وجود دارد که طول موجهای آنها بیش از چند آنگستروم اختلاف نخواهد داشت. این ساختار ریز بی هنجار است، زیرا بدون اعمال مغناطیسی خارجی رخ می دهد و لذا نمی توان آن را به عنوان اثر بهنجار زیمان توجیه کرد ساختار ریز در طیفهای گسیلی و درآشامی، خصوصیت مشترک تمامی طیفهای خطی اتمی است. ظاهراً، یک خصوصیت مشخص و اضافی از ساختار اتمی (خصوصیتی که نمی توان آن را بر حسب اعداد کوانتومی m_l , l , n توجیه کرد) در ساختار ریز آشکار می شود.

انتساب ساختار ریز به اثر داخلی زیمان در داخل اتم بی مناسب نیست. چنین اثری مستلزم حضور یک میدان مغناطیسی اتمی داخلی و چشمه جدیدی از گشتاور مغناطیسی و اندازه حرکت زاویه ای در داخل اتم است. اندازه حرکت زاویه ای مداری اتم قبلاً منظور شده است؛ چه سهم دیگری برای اندازه حرکت زاویه ای نمی توان در نظر گرفت؟

در سال ۱۹۲۵/۱۳۰۴ گودسمیت و اوهلن بک اظهار داشتند که یک اندازه حرکت زاویه ای ذاتی، کاملاً مستقل از حرکت مداری، به هر الکترون وابسته است. این اندازه حرکت ذاتی، اسپین الکترون نامیده می شود، زیرا می تون آن را با اندازه حرکت ذاتیی که هر جسم گسترده بر اساس دوران یا اسپین حول مرکز جرم خود ر دارد مانسته دانست. (یادآور می شویم که یک جسم چرخان متقارن دارای اندازه حرکت زاویه ای اسپنی است، که در محاسبات مربوط به اندازه حرکت زاویه ای، مستقل از انتخاب محور است؛ به بیان دیگر، اندازه حرکت زاویه ای یک جسم چرخان خاصیت ذاتی جسم است.) البته اکنون در مکانیک موجی تلقی الکترون به عنوان یک کره ساده با بار الکتریکی صحیح نیست؛ بلکه به خاطر مشخص کردن اندازه حرکت زاویه ای اسپینی الکترون به کمک یک مدل قابل تجسم، بهتر است که آن را به عنوان جسمی که در فضا دارای گسترش است و به طور پیوسته حول یک محور به دور خود می چرخد فرض کنیم. در نتیجه، اسپین الکترون، اندازه حرکت زاویه ای ذاتی L_S است که از دوران ابر بار حول یک محور دوران ثابت (نسبت به الکترون) ناشی می شود. به علاوه، چون بار الکتریکی منفی در حال دوران فرض می شود، یک میدان مغناطیسی توسط الکترون چرخان تولید خواهد شد و یک گشتاور مغناطیسی μ_s را که در جهت خلاف اندازه حرکت زاویه ای اسپینی L_s است می توان به اسپین الکترون نسبت داد(شکل ۵-۱۴).



شکل ۵-۱۴ اندازه حرکت زاویه ای اسپینی L_S الکترون و گشتاور مغناطیسی μ_s وابسته به میدان مغناطیسی.

چنانچه یک الکترون، با گشتاور مغناطیس دائمی خود، در یک میدان مغناطیسی قرار داشت، انتظار می رفت که اسپین آن کوانتیده فضایی باشد. در این صورت محور اسپین، گشتاور مغناطیسی و اندازه حرکت زاویه ای اسپینی به سمتگیریهای کوانتیده معینی محدود بودند، و انرژی اتم برحسب این سمتگیری ویژه ی داخلی اتمی می تواند بر یک الکترون با اندازه حرکت زاویه ای اسپینی L_S و گشتاور مغناطیسی اسپینی μ_s اثر کند. منشأ این میدان را می توان به شرح زیر تصور کرد: اگر یک الکترون چرخان هسته ای را دور بزند، به نظر یک ناظر ثابت نسبت به الکترون، هسته یک دور الکترون می چرخد. دوران این بار مثبت، یک میدان مغناطیسی در محل الکترون تولید می کند که بزرگی و جهت آن به بزرگی و جهت اندازه حرکت زاویه ای مداری الکترون بستگی دارد. این میدان، بر گشتاور مغناطیسی اسپینی μ_s اثر می کند. بر هم کنش بین اسپین الکترون و اندازه حرکت زاویه ای مداری را به طور مناسب بر هم کنش اسپین-مدار می نامند. این بر هم کنش در تمامی حالتهای مداری، بجز حالتهای S(با $l=0$) وجود دارد.

اکنون برای یافتن مقادیر مجاز اندازه حرکت زاویه ای اسپینی L_S و گشتاور مغناطیسی اسپینی μ_s به شواهد طیف نمایی باز می گردیم. مطالعه خطوط طیفی حاصل از اتمی با یک الکترون ظرفیت (مانند سدیم)، در غیاب میدان منغناطیسی خارجی، حکایت از آن می کند که هر یک از ترازهای انرژی مداری (بجز حالت s) به دو مولفه (یک یا دوتایی) شکافته شوند؛ حالت s ناشکافته باقی می ماند (یک تک تایی). به همین دلیل است که گذار $3P \rightarrow 3S$ در سدیم شامل دو خط D نزدیک به هم است: حالت $3S$ یک تک تایی و حالت $3P$ یک دو تایی است. چگونه می توان دوتایی کرن تمام حالتها (بجز حالتهای S) را بر حسب میدان مغناطیسی داخلی، که اندازه حرکت زاویه ای اسپینی الکترون را کوانتیده فضایی می کند تعبیر کرد؟ در اثر بهنجار زیمان هر حالتی که دارای یک عدد کوانتومی مداری l باشد، تحت تأثیر میدان مغناطیسی خارجی، به $2l+1$ زیرتر از شکافته میشود. همین طور، فرض می کنیم که حالتی که دارای عدد کوانتومی اندازه حرکت زاویه ای اسپینی s است، تحت تأثیر میدان مغناطیسی داخلی، به $2s+1$ مؤلفه شکافته می شود. چون تعداد مؤلفه های تمامی حالتهای ساختار ریز، با اندازه حرکت زاویه ای مدارسی غیر صفر همواره برابر با ۲ است، کمیت $2s+1$ باید با ۲ و عدد کوانتومی s دارای تک مقدار ۱/۲ باشد

$$2s + 1 = 2 \quad \text{یا} \quad s = \frac{1}{2}$$

چون اسپین مشخصه ذاتی الکترون است، هر الکترون دارای یک عدد کوانتومی اسپینی، با مقدار منحصر به فرد ۱/۲ است. اندازه حرکت زاویه ای اسپینی (یا ذاتی) ذره ای مانند الکترون، همچون بار و جرم آن، یک مشخصه اساسی است. بزرگی اندازه حرکت زاویه ای اسپینی L_S با رابطه ای شبیه به رابطه اندازه حرکت زاویه ای مداری [معادله (۱,۷)] بیان می شود

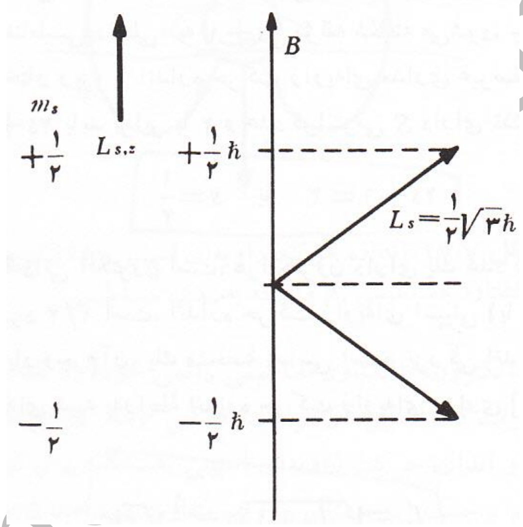
$$L_s = \sqrt{s(s+1)}h = \frac{1}{2}\sqrt{3}h$$

درک اینکه چرا حالت S سدیم تک تایی است ساده است. میدان مغناطیسی داخلی ناشی از حرکت مداری صفر است ($l=0$)؛ لذا، دو حالت اسپین ناشکافته و بنابراین واگن اند. ولی، به کمک میدان مغناطیسی خارجی می توان این واگنی را برطرف کرد.

اسپین الکترون، در حضور میدان مغناطیسی، کوانتیده فضایی است، بنابراین مؤلفه $L_{s,z}$ اندازه حرکت زاویه ای اسپینی در جهت این میدن مغناطیسی برابر است با

$$L_{s,z} = m_s h$$

که در آن عدد کوانتومی مغناطیسی اسپینی m_s، دارای دو مقدار ممکن $+1/2$, $-1/2$ است همان طور که در شکل ۵-۱۵ نشان داده شده است، کوانتس فضایی اندازه حرکت زاویه اسی اسپینی الکترون، در اثر میدان مغناطیسی، سمتگیری بردار اسپین الکترون L_S را به آن دو حالت ممکنی که در آنها مؤلفه در امتداد Z این بردار برابر h (۱/۲)+ یا $(-1/2)h$ است، محدود می کند. برای $m_s=+1/2$، بردار اندازه حرکت زاویه ای اسپینی، تقریباً بیشتر در جهت میدان مغناطیسی است تا در خلاف آن، و گشتاور مغناطیسی μ_s تقریباً بیشتر در خلاف جهت میدان است تا در جهت آن. از این رو، انرژی پتانسیل مغناطیسی ناشی از سمتگیری گشتاور مغناطیسی اسپینی الکترون، برای حالت $m_s=+1/2$، از انرژی پتانسیل مغناطیسی حالت $m_s = -۱/۲$ بیشتر است.



شکل.۵-۱۵ کوانتش فضایی اندازه حرکت زاویه ای اسپینی الکترون.

گشتاور مغناطیسی در حرکت اسپینی، همچون حرکت مداری، در همان امتداد خط بردار اندازه حرکت زاویه ای، ولی در جهت مخالف، قرار می گیرد. مطالعه مفصل اثر زیمان برای اتمهایی که دارای ساختار ریزند و نیز تحلیل نظری نشان می دهد که نسبت ژیرومغناطیسی وابسته به اسپین الکترون از رابطه

$$\frac{\mu_S}{L_S} = 2(1/001159615)\frac{e}{2m}$$

به دست می آید که در آن m , e به ترتیب، بار و جرم الکترون اند. نسبت ژیرومغناطیسی اسپین الکترون خیلی نزدیک به دو برابر ژیرومغناطیسی متناظر حرکت مداری الکترون است؛ یعنی، برای یک اندازه حرکت زاویه ای معلوم، اثرهای مغناطیسی الکترون چرخان دو برابر اثرهای مغناطیسی الکترون مداری است.

تغییر انرژی پتانسیل مغناطیسیΔE_sگشتاور مغناطیسی اسپین الکترون در میدان مغناطیس B از رابطه

$$\Delta E_s = m_s\left(2\frac{2h}{2m}\right)B$$

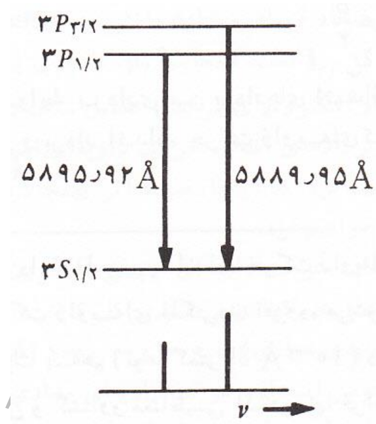
محاسبه بزرگی تقریبی میدان مغناطیسی که باعث شکافت حالت P در سدیم می شود جالب توجه است. شکل ۵-۱۶ حالتهای $3S$, $3P$ سدیم را نشان می دهد. دو گذاری که منجر به خطوط D سدیم می شوند به اندازه $\Delta\lambda=6\text{Å}$ با هم اختلاف دارند؛ بنابراین اختلاف انرژی ΔE بین دو حالت P به وسیله رابطه

$$\Delta E = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda^2} = 2\mu_{s,z}B$$

داده می شود. در نتیجه

$$B=20Wb/m^2=200000G$$

است که میدانی بسیار قوی است. شکافتگی ساختار زیر ترازهای انرژی، که از بر هم کنش اسپین مدار ناشی می شود، با مشاهدات تجربی ساختار ریز در خطوط طیفی توافق کامل دارد. بررسی جزئیات کمی نیازمند روشهای پیچیده مکانیک کوانتومی است. میدانهای مغناطیسی داخلی فوق العاده قوی اند، و شکافتگی ساختار ریز (نوعاً از مرتبه $10^{-3}eV$، یا چند آنگستروم در طول موج در خطوط مرئی) با پیشگوییهای نظری در توافق است.

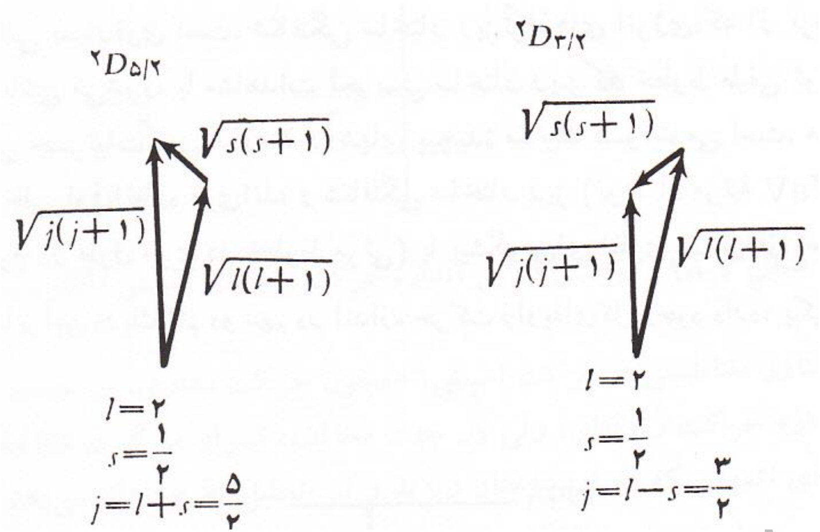


شکل ۵-۱۶ ترازهای انرژی و طیف خطوط D سدیم (در مقیاسهای متفاوت).

بنابراین در یک اتم دو سهم در اندازه حرکت زاویه‌ای کل وجود دارد: یکی اندازه حرکت زاویه‌ای مداری و دیگری اندازه حرکت زاویه‌ای اسپین الکترون. نظریه کوانتومی به درستی پیشگویی می‌کند که اندازه حرکت زاویه‌ای کل L_j یک اتم با یک الکترون ظرفیت با عدد کوانتومی اندازه حرکت زاویه‌ای کل j مشخص می‌شود و بزرگی آن از رابطه

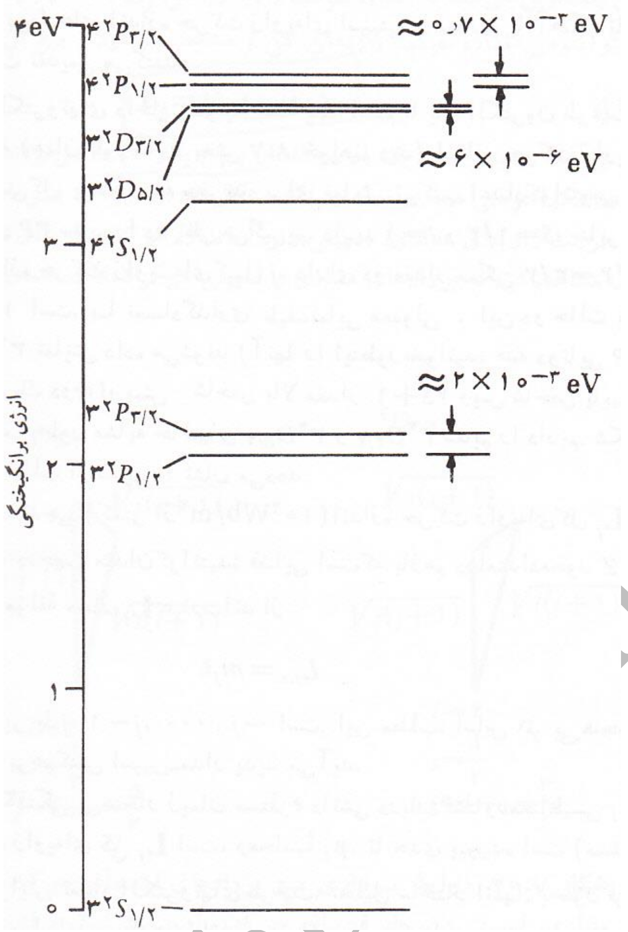
$$\mathrm{L_j} = \sqrt{\mathrm{j(j+1)}}\hbar$$

به دست می آید. عدد j هر یک از دو مقدار $l+s$ یا l-s را می تواند بپذیرد، که در آن l , s اعدد کوانتومی مداری و اسپینی اند. شکل۵-۱۷ روابط برداری بین بردارهای اندازه حرکت زاویه ای مداری، اسپینی و بردار اندازه حرکت زاویه ای کل را نشان می دهد. می توان مشاهده کرد که بردارهای مداری و اسپینی هرگز کاملاً در همان جهت بردار کل یا در جهت خلاف آن قرار نمی گیرند. یک وسیله مفید برای نشان دادن جفت شدگی بین اندازه حرکتهای زاویه اسی مداری و اسپینی، مدل به اصطلاح برداری است. در این مدل فرض می شود که بردارهای اندازه حرکت زاویه ای اسپینی و مداری با آهنگ ثابتی حول بردار $\mathrm{L_j}$ حرکت تقدیمی می کند.



شکل ۵-۱۷: روابط برداری بین بردارهای اندازه حرکت زاویه‌ای مداری، اسپینی و بردار اندازه حرکت زاویه‌ای کل برای حالتهای $2D_{5/2}$ و $2D_{3/2}$

تمامی الکترونهای داخل پوسته بسته یک اتم با یک الکترون ظرفیت، آنچنان مرتب شده اند که ندازه حرکت زاویه ای کل و گشتاور مغناطیسی کل پوسته بسته صفرند. برای نمایش ترکیب اعداد کوانتومی مداری اسپینی، حالتهای $3P$ سدیم را در نظر می گیریم. داریم $l=1$, $s=1/2$؛ بنابراین، عدد کوانتومی اندازه حرکت زاویه ای کل j، دارای دو مقدار ممکن $1+1/2=3/2$ و $1-1/2=1/2$ است. با نمادگذاری طیف نمایی معمولی، این دو حالت به صورت $3^2P_{1/2}$, $3^2P_{3/2}$ نمایش داده می شوند (آنها را اینطور بخوانید: «سه دو تایی P سه دوم» و «سه دو تایی P یک دوم»)؛ پیش شاخص بالا مقدار $2S+1$ و پس شاخص پایین مقدار j را به دست می دهد. به طور مشابه حالتهای $3^2P_{5/2}$, $3^2P_{3/2}$ سدیم را داریم. شکل ۵-۱۸ شکافتگی چندین حالت از سدیم را نشان می دهد.



شکل ۵-۱۸: شکافتگی چندین حالت از سدیم که از بر هم کنش اسپین- مدار ناشی می شود(شکافتگیها خیلی بزرگ شده‌اند).

در میدان خارجی (کمتر از $10^2 wb/m^2$) اندازه حرکت زاویه ای کل L_j با بزرگی $[j(j+1)]^{1/2}h$، در جهت میدان کوانتیده فضایی است که باز هم در امتداد محور z انتخاب می شود.$2j+1$ مؤلفه مجاز L_j عبارت اند از

$$L_{j,z} = m_j h$$

که در آن m_j برابر با j، $j-1$، ...، $-j$ است. این مطلب، اساس اثر بی هنجار زیمان است که همراه با برهم کنش اسپین- مدار پدید می آید.

محاسبه شکافتگی بی هنجار زیمان مستلزم دانشی درباره گشتاور مغناطیسی μ_j، تا حدی پیچیده است. به علاوه، با افزایش تعداد الکترونهای ظرفیت، تحلیل ساختار اتمها، به طور فزاینده ای پیچیده می شود؛ زیرا باید بردارهای اندازه حرکت زاویه ای اسپینی و مداری مربوط به دو و یا چند الکترون را ترکیب کرد. در اینجا، صرفاً اثر بهنجار زیمان را در یک اتم با دو الکترون ظرفیت توصیف خواهیم کرد.

دو عدد کوانتومی اندازه حرکت زاویه ای اسپینی الکترون $S_2=1/2$, $S_1=1/2$ معمولاً با هم ترکیب می شوند و عدد کوانتومی اسپینی کل S اتم را تشکیل می دهند، که در آن $S=s_1+s_2=1$ (اسپینهای موازی) یا $S=s_1-s_2=0$ (اسپینهای پادموازی است). به طور مشابه، دو عدد کوانتومی اندازه حرکت زاویه ای مداری l_2 , l_1 معمولاً یک عدد کوانتومی اندازه حرکت زاویه ای مداری کل L را تشکیل می دهند. سپس اعداد

کوانتومی اسپینی و مداری S , L با هم ترکیب می شوند و عدد کوانتومی اندازه حرکت زاویه ای کل J مربوط به اتم را تشکیل می دهند. حالتی را در نظر می گیریم که در آن $S=0$ است؛ چنین حالتی یک حالت تک تایی است، زیرا $2S+1=1$ است (وقتی $S=1$ و $2S+1=3$ باشد، حالت سه تایی است). در این صورت $J=L$ است و اندازه حرکت زاویه ای کل، تنها ناشی از حرکت مداری است. گذارهای بین حالتهای تک تایی، در میدان مغناطیسی اثر بهنجار زیمان را نمایش می دهند. عموماً پدید آمدن اثر بهنجر زیمان مستلزم آن است که انداز ه حرکت زاویه ای اسپینی کل اتم صفر باشد، که گفته می شود اتم دارای تعدد زوجی از الکترونهایی است که به صورت زوجهای با اسپین ناهمردیف گروه بندی شده اند.

در تحلیل مکانیک موجی غیر نسبیتی از ساختار اتم، سد عدد کوانتومس n , l , m_l با تطبیق امواج سه بعدی (نمایشگر الکترونها) بر ناحیه محیط بر هسته به طور طبیعی ظاهر می‌شوند. اسپین الکترون، که هیچ مانستگی کلاسیک ندارد (بجز در مورد مدل ساختگی کره باردار چرخان)، نتیجه مکانیک موجی غیر نسبیتی نیست. اولین بررسی مکانیک موجی نسبیتی، که سه مختصه فضایی و یک مختصه زمانی را ترکیب می‌کند، در سال ۱۹۲۸/۱۳۰۷ توسط دیراک به طور موفقیت آمیز به عمل آمد. در نظریه کوانتومی نسبیتی دیراک، اسپین الکترون با اندازه حرکت زاویه ای $[s(s+1)]^{1/2}h$ و با نسبت ژیرو مغناطیسی $2(e/2m)$، به طور طبیعی با سه عدد کوانتومی n , l , m_l ظاهر می شود. نتیجه دیگر مکانیک موجی دیراک اولین پیشگویی پاد ذره الکترون (پوزیترون) بود. پوزیترون، درست مانند الکترون ، دارای یک عدد کوانتومی اندازه حرکت زاویه ای اسپینی s برابر $1/2$ و یک نسبت ژیرو مغناطیسی برابر $2(e/2m)$ است؛ ولی بردارهای اندازه حرکت زویه ای اسپینی و گشتاور مغناطیسی، به واسطه حرکت بار الکتریکی مثبت، همجهت اند.

نکته: مقادیر m_s برای s معلوم بین $-s$ و $+s$ قرار می گیرند یعنی:

$$-s \le m_s \le +s$$

توجه کنیم که گشتاور مغناطیسی در حرکت اسپینی، همچون حرکت مداری، در همان امتداد خط بردار اندازه حرکت زاویه ای، ولی در جهت مخالف، قرار می گیرد. مطالعه مفصل اثر زیمان برای اتم هایی که دارای ساختار ریز هستند و نیز تحلیل نظری نشان می دهد که نسبت ژیرو مغناطیسی وابسته به اسپین الکترون از رابطه زیر به دست می آید:

$$\frac{\mu_s}{L_s} = 2\left(\frac{1}{001159615}\right)\frac{e}{2m}$$

نسبت ژیرومغناطیسی اسپین الکترون خیلی نزدیک به دو برابر نسبت ژیرو مغناطیسی متناظر حرکت مداری الکترون است. یعنی، برای یک اندازه حرکت زاویه ای معلوم، اثرهای مغناطیسی الکترون چرخان دو برابر اثرهای مغناطیسی الکترون مداری است.

نکته: تغییر انرژی پتانسیل مغناطیسی ΔE_s گشتاور مغناطیسی اسپین الکترون در میدان مغناطیسی B از رابطه زیر به دست می آید:

$$\Delta E_s = \frac{eBh}{2} ms$$

سوال: کدام یک از مجموعه‌ها که به ترتیب از راست به چپ بیانگر اعداد کوانتومی (m_s, m_l, l, n) یک حالت برای الکترون در اتم هیدروژن می باشد، غیر ممکن است؟

۱) $(\frac{1}{2},-2,1,3)$ ۲) $(\frac{-1}{2},-2,2,3)$ ۳) $(\frac{1}{2},0,2,6)$ ۴) $(-\frac{1}{2},1,1,3)$

پاسخ:گزینه (۱) صحیح است.

برای حل این سوال نکات زیر را رعایت می کنیم :

۱) باید $n \geq 0$ باشد.

۲) باید $n \geq l+1$ باشد و $l \geq 0$

۳) باید $-1 \leq m_l \leq l$ باشد.

۴) اسپین الکترون هم فقط می تواند مقادی $\frac{1}{2}$ به خود بگیرد.

حال به بررسی گزینه ها می پردازیم:

بررسی گزینه ۱)

$$n = 3\ , l = 1\ \rightarrow n \geq l+1\ \rightarrow 3 \geq 2$$
$$l = 1 \rightarrow m_l = -1,0,1$$

چون در این گزینه $m_l = -2$ مطرح شده است لذا این گزینه غیر ممکن است.

بررسی گزینه ۲)

$$n = 3\ , l = 2\ \rightarrow 3 \geq 3$$
$$l = 1 \rightarrow m_l = -2,-1,0,1,2$$
$$S = \frac{-1}{2}$$

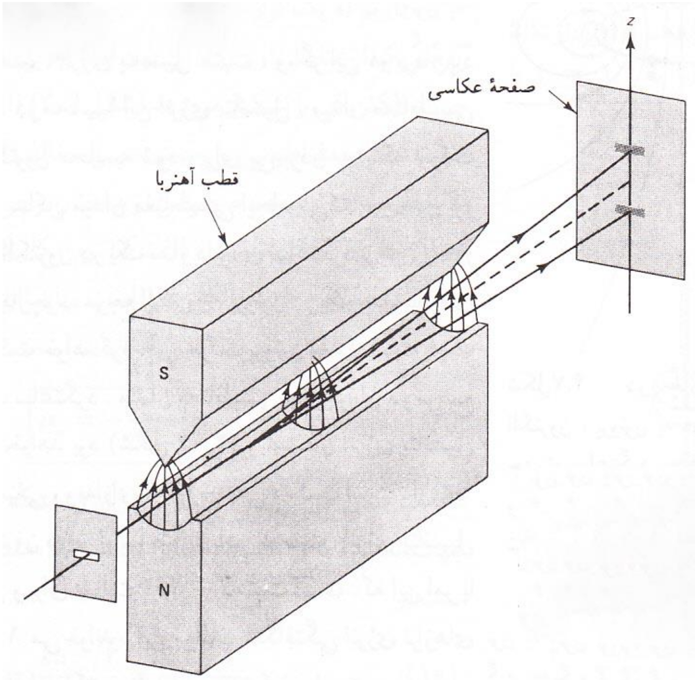
این گزینه ممکن است.

سایر گزینه ها نیز به همین ترتیب بررسی می شوند

۵-۶ آزمایش اشترن گرلاخ

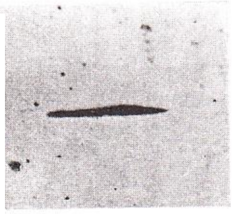
نخستین آزمایشی که شواهد تجربی مستقیم را برای اسپین الکترون و کوانتش تکانه زاویه ای به دست می دهد، در سال ۱۹۲۲ به وسیله اشترن و گرلاخ انجام شد. این آزمایش بتدا با اتمهای نقره انجام شد، امّا بعداً با اتمهای هیدروژن تکرارش کردند. شکل ۵-۱۹ طرحوارهای از دستگاهی را نشان می‌دهد که این آزمایش با آن انجام گرفت. بارسیکهای از اتمها در امتداد گاف بین قطبهای یک مغناطیس حرکت می‌کنند و به یک صحنه عکاسی بر می خورند. قطبهای مغناطی دقیقاً شکل داده شدهاند، به طوری که میدان مغناطیسی بسیار ناهمگن است (در شکل ۵-۱۹، میدان مغناطیسی در جهت قائم افزایش می یابد). در چنین میدان مغناطیسی ناهمگنی، بر گشتاور مغناطیسی نیروی قائمی وارد می آید که به سمتگیری گشتاور مغناطیسی بستگی دارد: بنابر معادله انرژی پتانسیل یک گشتاور مغناطیسی در میدان مغناطیسی قائم در صفحه میانی آهنربا عبارت است از $U = -\mu_z B_z$ و بنابراین نیرو بدین قرار است.

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

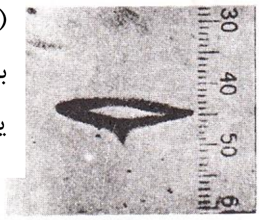


شکل۵-۱۹: دستگاه مربوط به آزمایش اشترن- گرلاخ. سر قطبهای مغناطیس چنان شکل گرفته‌اند تا یک میدان مغناطیسی بسیار ناهمگن به وجود آورند، که قدرت آن از نه به سر افزایش می یابد.

اگر μ_z مثبت باشد، در این صورت نیرو مثبت است؛ اگر μ_z منفی باشد، پس نیرو هم منفی است. از اینرو، اتمهایی که گشتاور مغناطیسی دارند به اندازه ای متناسب با مؤلفه z اسپین، به بالا یا پایین منحرف می شوند. در باریکه فرودی، توزیع جهت گشتاورهای مغناطیسی اتمها کاتوره ای است. به تعبیر کلاسیکی، معنی این امر آن است که توزیع گشتاورهای مغناطیسی این اتمها گستره پیوسته ای از مقادیر μ_z را فرا می گیرد، و انحراف این گشتاورهای مغناطیسی به وسیله میدان مغناطیسی به گستره پیوسته ای از مناطق برخورد بر صفحه عکاسی منجر خواهد شد. در تجربه، به نتیجه کاملاً متفاوتی می رسیم. فقط یک مجموعه گسسته از مناطق برخورد را می یابیم؛ در مورد نقره یا هیدروزن، فقط دو منطقه برخورد یافت می شود (شکل ۵-۲۰). این نتیجه تجربی اثبات می کند که μ_z کوانتیده است. از آنجا که گشتاور مغناطیسی با حرکت چرخشی بار الکتریکی توأم و با تکانه زاویه ای است. در مورد هیدروژن، غیاب تکانه زاویه ای مداری در اتم ما را به این نتیجه رهنمون می شود که گشتاور مغناطیسی کوانتیده باید به نوعی تکانه زاویه ای غیرمداری کوانتیده وابسته باشد.



(الف)



(ب)

شکل۵-۲۰: عکسهایی که اشترن و گرلاخ با باریکه‌ای از اتمهای نقره گرفتند.(الف) وقتی میدان مغناطیسی صفر باشد، تمام اتمها در یک تک منطقه برخورد، اصابت می کنند. (ب) وقتی میدان مغناطیسی ناصفر باشد، اتمها به یک منطقه بالایی و یک منطقه پایینی برخورد می کنند.

این نتیجه گیری با مفهوم اسپین الکترون سازگار است. علاوه بر الکترون، بسیاری از ذرات کوانتوم مکانیکی «بنیادی» دیگر هم اسپین دارند. در جدول عدد کوانتومی اسپین، s، برای برخی از این ذرات درج شده است؛ در این جدول چند تایی م ذره بدون اسپین ($s=0$) گنجانده شده است.

اسپین برخی ذرات

ذره	عدد کوانتومی اسپین، s
الکترون	۱/۲
پروتون	۱/۲
نوترون	۱/۲
فوتون	۱
نوترینو	۱/۲
موئون	۱/۲
پیون (π^0, π^-, π^+)	۰
کایون (K^0, K^-, K^+)	۰
$J/\psi(3100)$	۱
$\Sigma(2030)$	۷/۲
$\Lambda(1520)$	۳/۲

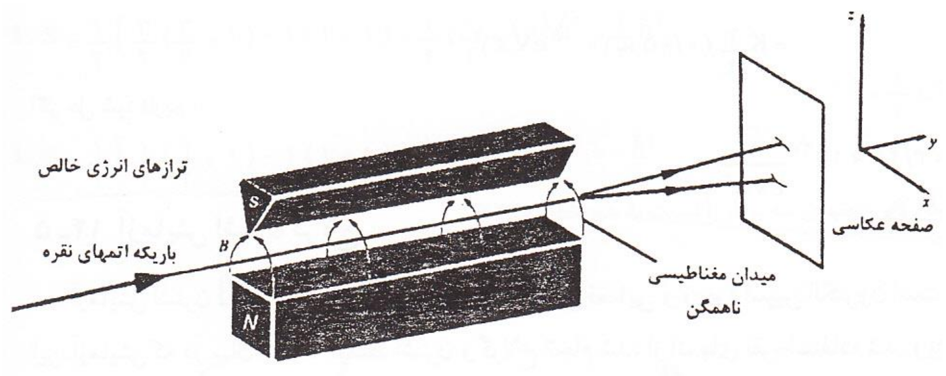
مثال:

رابطه $F_z = -m_s \frac{et}{m}\frac{\partial B}{\partial Z}$ را اثبات کنید.

جواب: با توجه به انرژی پتانسیل الکترون در میدان مغناطیسی داریم:

$$E_B = -\mu . B = -\mu_{SX} B_X - \mu_{sy} B_y - \mu_{SZ} B_Z$$

با توجه به شکل داریم:



نمایش طرح دار آزمایش اشترن- گرلاخ

(B_x ,B_z فقط به x , z بستگی دارد و $B_y = 0$). لذا:

$$F_x = -\frac{\partial E_B}{\partial x} = \mu_{SZ}\frac{\partial B_x}{\partial x} + \mu_{SZ}\frac{\partial B_Z}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial E_B}{\partial y} = 0$$

$$F_z = -\frac{\partial E_B}{\partial x} = \mu_{SZ}\frac{\partial B_x}{\partial z} + \mu_{SZ}\frac{\partial B_Z}{\partial z}$$

اما، در امتداد محور باریکه، $\frac{\partial B_Z}{\partial z} = 0$(بنا به تقارن) و $\frac{\partial B_x}{\partial z} = 0$ هم چنین، $\frac{\partial B_x}{\partial x}$ خیلی کوچک است. در نتیجه داریم:

$$F_x \approx 0 ,F_y = 0 ,F_Z = \mu_{SZ}\frac{dB}{dz} cos\theta \frac{dB}{dz}$$

مثال:

جدایی بیشینه باریکه‌ای از اتمهای هیدروژن را بدست آورید که فاصله *20cm* را با تندی $2\times10^5 m/s$ عمود بر میدان مغناطیسی با گرادیان $2\times10^2 T/m$ می پیماید. گشتاور مغناطیسی پروتون را نادیده بگیرید.(سری شومز)

جواب: در حالت پایه، اتمهای هیدروژن دارای اندازه حرکت زاویه ای صفر هستند. نیروی اعمالی بر اتم هیدروژن برابر است با:

$$F_z = \mu_{SZ}\frac{\partial B_Z}{\partial z}$$

با توجه به اینکه $g_s = 2$ ، $\mu_{SZ} = -\left(\frac{e}{m}\right) m_s h,$ داریم:

$$\mu_{SZ} = \frac{eh}{m}|m_s|\frac{dB}{dz} = \frac{eh}{2m}\frac{dB}{dz} = (9/27\times10^{-24}J/T)(2\times10^2 T/m)$$
$$= 1/85\times10^{-21}N$$

داریم:

$$\Delta z = \frac{1}{2}\alpha_z t^2 \ ; \ \frac{1}{2}Dy = vt$$

$$\Delta z = \frac{1}{2}\left(\frac{1/85\times10^{-21}N}{1/67\times10^{-27}kg}\right)\left(\frac{0/20m}{2\times10^5 m/s}\right) = 5/54\times10^{-7}m$$

با توجه به اینکه این جابه جایی بطرف بالا می باشد، جدایی کل برابر است با:

$$\Delta z = 1/11\times10^{-6}m$$

مثال:

اگر باریکه ای از الکترونهای آزاد عمود بر میدان حرکت کند، اختلاف بین انرژی الکترونهایی که با میدان مغناطیسی یکنواخت *0/8T* «هم جهت» و «در خلاف جهت» قرار می گیرند را به دست آورید.

جواب: با $B_x = B_y = 0$ داریم:

$$E_B = -B\mu_{sz} = -B(-\frac{eh}{m})m_s \Rightarrow$$

$$\Delta E_B = B\frac{eh}{m}\Delta m_s = (0/8T)\left(2\times 5/79\times 10^{-5}\frac{eV}{T}\right)[\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)]$$

$$-9/26\times 10^{-5}ev$$

سوال: آزمایش اشترن – گرلاخ چه ویژگی الکترون را به نمایش می گذارد؟

۱) اسپین ۲) تکانه زاویه ای مداری ۳) انرژی ۴) تکانه خطی

پاسخ: گزینه (۱) صحیح است.

در واقع آزمایش اشترن- گرلاخ به این صورت می باشد که، یک دو قطبی مغناطیسی را در نظر می گیریم. گشتاور دو قطبی مغناطیسی $\vec{\mu}$ در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ تحت تاثیر گشتاور نیروی زیر قرار می گیرد:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B}$$

که این گشتاور می کوشد که آهنربا را در امتداد میدان قرار دهد. ولی قدرت این گشتاور نیرو به آن اندازه نیست که این آهنربا را جابه جا کند لذا این آهنربا تحت تاثیر نیروی دیگری جابه جا شود که این نیرو همان نیروی ناشی از میدان مغناطیسی ذاتی ذره است که از اسپین الکترون ناشی می شود.