آنالیز ترکیبی

مقدمه

در بسیاری از مسائل آمار در وضعیتی مفروض باید تمام حالت‌های ممکن را فهرست کنیم یا حداقل تعداد امکانات مختلف موجود را تعیین نماییم. در این فصل ابتدا اصول شمارش را بیان کرده، سپس روش‌های رایج ترتیب و ترکیب را از روی اصل شمارش به دست می‌آوریم. در انتهای فصل به مدل توزیع توپ درون جعبه‌ها می‌پردازیم.

۱-۱ اصل ضرب

اگر عملی به n_1 طریق و برای هر کدام از آن‌ها عمل دومی به n_2 طریق و.... و عمل k ام به n_k طریق انجام شود. این k عمل با هم به $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ طریق انجام می‌پذیرد.

۲-۱ اصل جمع

اگر عملی از یک روش به n_1 طریق و از روش دیگر به n_2 طریق ممکن باشد و این دو روش نتوانند همزمان انجام شوند در این صورت این عمل با روش اول یا دوم به $n_1 + n_2$ طریق انجا می‌گیرد.

مثال۱ : با ارقام $\{0,1,2,3,4,5\}$ چند عدد سه رقمی فرد بدون تکرار می‌توان ساخت؟

حل: رقم یکان به سه طریق انتخاب می‌شود سپس به غیر از صفر و عدد انتخاب شده در رقم یکان رقم صدگان می‌تواند انتخاب شود (۴ طریق) و در رقم دهگان نیز ۴ طریق ممکن است بنابراین تعداد حالات برابر است با $4 \times 4 \times 3 = 48$

مثال ۲ : چند عدد چهاررقمی مضرب ۵ وجود دارد؟

۱) ۱۲۵۶ ۲) ۱۵۷۶ ۳) ۱۸۰۰ ۴) ۲۰۰۰

حل: گرینه۳. توجه کنید اعدادی مضرب ۵ هستند که رقم یکان آن‌ها صفر یا ۵ باشد. پس برای یکان دو انتخاب در رقم هزارگان به جز صفر، ۹ انتخاب و در رقم صدگان و دهگان ۱۰ انتخاب داریم بنابراین تعداد اعداد چهار رقمی مضرب ۵ برابر است با: $9 \times 10 \times 10 \times 2 = 1800$

مثال۳ : چند عدد سه رقمی زوج به وسیله ارقام $\{۱,۲,۵,۶,۹\}$ می‌توان ساخت که رقم تکراری نداشته باشند و از ۵۱۰ بزرگتر باشند؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۸

حل: گزینه۲. ۱۲ عدد زوج سه رقمی بدون تکرار با صدگان ۵ یا ۹ داریم: $۱۲=۲\times۳\times۲$

و ۳ عدد زوج سه رقمی بدون تکرار ارقام با صدگان ۶ داریم: $۳=۱\times۳\times۱$. بنابراین ۱۵ عدد سه رقمی بزرگتر از ۵۰۰ داریم که همین تعداد از ۵۱۰ هم بزرگترند.

۱-۳ جایگشت

حالاتی را که می‌توان اشیا یک مجموعه را در کنار یکدیگر قرار داد جایگشت یا تبدیل گویند. جایگشت‌های مهم عبارتند از: جایگشت خطی، جایگشت دایره‌ای، جایگشت یک در میان و جایگشت تکراری.

۱-٤-۱ جایگشت خطی

اگر n عضو متمایز را بخواهیم در کنار یکدیگر در خط قرار دهیم تعداد جایگشت‌های مختلف این عناصر برابر است با:
$$n(n-۱)(n-۲)...(۲)(۱)=n!$$

مثال ۵ : ۵ درخت کاج متمایز و ۷ درخت صنوبر و ۳ درخت سرو متمایز را به چند طریق می‌توان در یک ردیف کاشت؟

۱) $\frac{۱۵!}{۵!۷!۴!}$ ۲) $\frac{۱۵!}{۳!}$ ۳) $۱۵!$ ۴) $\binom{۱۵}{۳}$

حل: گزینه۳. چون همه درخت‌ها متمایزند پس $۱۵!$ حالت داریم که جایگشت‌های ۱۵ شی متمایز است.

مثال ۶ : به چند طریق می‌توان ۲ مهره سفید و ۳ مهره سیاه را در یک خط مرتب کرد به‌طوری که مهره‌های سفید در کنار یکدیگر باشند؟

۱) ۴۸ ۲) ۳۶ ۳) ۲۴ ۴) ۱۲

حل: گزینه۱. مهره‌های سفید را یک گروه فرض می‌کنیم بنابراین اکنون ۴ مهره داریم با $۴!$ جایگشت اما خود مهره‌های سفید نیز به $۲!$ طریق جابجایی دارند بنابراین تعداد حالت‌ها برابر است با: $۴!\times۲!=۴۸$

۱-٤-۲ جایگشت دایره‌ای

تعداد حالاتی که می‌توان n عنصر متمایز را به صورت دایره‌ای در کنار یکدیگر قرار دارد برابر است با $(n-۱)!$

مثال۷ : به چند طریق می‌توان ۲ تهرانی، ۳ اصفهانی و ۴ یزدی را دور یک میز گرد مرتب کرد به طوری‌که همشهری‌ها پهلوی یکدیگر قرار بگیرند؟

حل: ابتدا تهرانی‌ها، اصفهانی‌ها و یزدی‌ها را به‌صورت گروهی فرض می‌کنیم اکنون این ۳ گروه به !۲ طریق مختلف دور میز مرتب می‌شوند. اما برای تهرانی‌ها !۲ برای اصفهانی‌ها !۳ و برای یزدی‌ها !۴ جایگشت وجود دارد. بنابراین تعداد حالات برابر است با: $۴!\times۳!\times۲!\times۲!$

مثال۸ : از n نفر که دور یک میز گرد نشسته‌اند در چند حالت همواره ۵ نفر مشخص پهلوی هم قرار می‌گیرند؟

۱) $۵!(n-۴)!$ ۲) $۵!(n-۶)!$ ۳) $۵!(n-۵)!$ ۴) $۵!(n)!$

حل: گزینه۳. آن ۵ نفر را یک نفر فرض کنید با $n-۵$ نفر بقیه می‌شوند $n-۴$ نفر که به $(n-۵)!$ طریق می‌توانند دور میز بنشینند. این ۵ نفر نیز به !۵ طریق با همدیگر جابه جا می‌شوند.

۱-٤-۳ جایگشت یک در میان

اگر بخواهیم m عنصر از یک گروه و n عنصر از گروهی دیگر را به صورت یک در میان دز یک خط مرتب کنیم دو حالت وجود دارد:

اگر $m=n \Leftarrow$ تعداد حالت‌ها برابر است با: $۲\times m!\times n!$

اگر $m=n+۱ \Leftarrow$ تعداد حالت‌ها برابر است با: $m!\times n!$

مثال۹ : در یک مهد کودک ۱۰ پسر و ۱۰ دختر را به صورت تصادفی روی صندلی‌های یک ردیف می‌نشانیم چند حالت وجود دارد اگر بخواهیم کودکانی که در کنار یکدیگر نشسته‌اند جنسیت یکسانی نداشته باشند؟

۱) $۲\times(۱۰!)^۲$ ۲) $۱۰!\times۱۰!$ ۳) $۱۰!$ ۴) $\frac{۱۰!}{۲}$

حل: گزینه۱. تعداد دو گروه برابر است. ابتدا دو حالت وجود دارد که از کدام گروه شروع کنیم (دختر یا پسر) پس برای هر گروه !۱۰ جایگشت وجود دارد تعداد حالت‌ها برابر $(۱۰!)^۲ \times ۲ = ۱۰! \times ۱۰! \times ۲$

۱-٤-٤ جایگشت تکراری

تعداد جایگشت‌های مختلف n عنصر که n_1 تای آن از نوع اول، n_2 تای آن از نوع دوم و .... و n_k تای آن از نوع k ام برابر است با $\dfrac{n!}{n_1! \times n_2! \times \ldots \times n_k}$; $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$

مثال۱۰: با حروف *Statistics* چند کلمه ۱۰ حرفی مختلف می‌توان ساخت؟

۱) $\dfrac{۱۰!}{۳!}$ ۲) $\dfrac{۱۰!}{۶!}$ ۳) $\dfrac{۱۰!}{۷۲!}$ ۴) $\dfrac{۱۰!}{۱۸!}$

حل: گزینه۳. کلمه شامل ۱۰ حرف مختلف است پس تعداد کل جایگشت‌ها برابر با !۱۰ است. اما در اینجا حالت‌های تکراری داریم بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با: $\dfrac{۱۰!}{۳! \times ۳! \times ۲!}$

۱-۴ ترتیب

انتخاب r شی از n شی زمانی که ترتیب انتخاب یا قرار گرفتن r شی در کنار یکدیگر مهم باشد ترتیب نام دارد:

الف- اگر تکرار اشیا مجاز نباشد تعداد راه‌های ممکن برابر است با: $P_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

ب- اگر تکرار اشیا مجاز باشد تعداد راه‌های ممکن برابر است با: n^r

نکته۱: به طور کلی هر وقت بتوان لااقل دو گروه متمایز تشکیل داد که اعضای دو گروه یکسان باشند، می‌گوییم ترتیب مهم است یا رعایت شده است.

مثال۱۱: برای باز کردن یک قفل مرکزی انتخاب ۴ عدد مناسب از اعداد مختلف یک رقمی بدون تکرار نیاز است. این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟

۱) ۵۰۴۰ ۲) ۲۱۰ ۳) ۲۴ ۴) ۶۱۵۴

حل: گزینه۱. انتخاب ۴ رقم از ارقام $\{۰,۱,۲,...,۹\}$ که در اینجا ترتیب رعایت شود بنابراین:

$$P_{۱۰}^{۴} = \frac{۱۰!}{(۱۰-۴)!} = ۵۰۴۰$$

۱-۵ ترکیب

انتخاب r شی از n شی زمانی که ترتیب انتخاب یا قرار گرفتن r شی در کنار یکدیگر مهم نباشد ترکیب نام دارد.

الف- اگر تکرار عناصر مجاز نباشد تعداد راه‌های ممکن برابر است با: $C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

ب- اگر تعداد عناصر مجاز باشد تعداد راه‌های ممکن برابر است با: $C_n^r = \binom{n+r-۱}{r}$

مثال۱۲: از جعبه‌ای شامل ۵ مهره آبی، ۳ مهره سفید و ۴ مهره قرمز به چند طریق می‌توان ۲ مهره آبی و ۱ مهره قرمز انتخاب کرد؟ $\binom{۵}{۲}.\binom{۴}{۱} = ۴۰$

مثال۱۳ : دانشجویی در یک امتحان بایستی به ۷ سوال از ۱۰ سوال پاسخ دهد. او به چند طریق می‌تواند سوال-ها را انتخاب کند اگر لازم باشد به حداقل ۳ سوال از ۵ سوال اول پاسخ دهد؟

۱) ۵۰ ۲) ۱۱۰ ۳) ۲۵۰ ۴) ۱۶۲

حل: گزینه۲. چون باید حداقل ۳ سوال از ۵ سوال اول پاسخ دهد بنابراین می‌تواند ۴ سوال یا ۵ سوال از سوالات اول را نیز پاسخ دهد. $\binom{۵}{۳}\binom{۵}{۴}+\binom{۵}{۴}\binom{۵}{۳}+\binom{۵}{۵}\binom{۵}{۲} = ۱۱۰$

مثال۱۴ : فردی ۸ دوست دارد که می‌خواهد ۵ نفر آن‌ها را به یک مهمانی دعوت کند چند انتخاب وجود دارد اگر دو نفر از دوستان وی با هم اختلاف داشته باشند و نخواهند با هم در میهمانی شرکت کنند؟

۱) ۲۶ ۲) ۳۶ ۳) ۴۸ ۴) ۵۲

حل: گزینه ۲. کل حالات منهای حالاتی که ۲ نفر با هم باشند، یا هیچکدام را دعوت نمی‌کند و یا یکی از آن دو نفر را دعوت می‌کند. $\binom{8}{5}-\binom{2}{2}\binom{6}{3}=36$ یا $\binom{2}{0}\binom{6}{5}+\binom{2}{1}\binom{6}{4}=36$

چند رابطه مهم

$$1)\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$$

$$2)\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}$$

$$3)\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$$

$$4)\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots$$

$$5)r!C_n^r=P_n^r$$

$$11)(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^r b^{n-r}$$

$$6)\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n\times 2^{n-1}$$

$$7)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$$

$$8)\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}=0$$

$$9)\binom{n+m}{r}=\binom{n}{0}\binom{m}{r}+\binom{n}{1}\binom{m}{r-1}+\ldots+\binom{n}{r}\binom{m}{0}$$

$$10)i\binom{n}{i}=n\binom{n-1}{i-1}$$

مثال۱۵: ظرفی حاوی n توپ سفید و n توپ قرمز است. تعداد حالاتی که می‌توان از این ظرف n توپ انتخاب کرد برابر است با:

۱) $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}$ ۲) $\frac{(2n)!}{n!}$ ۳) $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^2$ ۴) $\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\binom{n}{k}$

حل: گزینه ۳. در می‌خواهیم از میان $2n$ توپ n توپ برداریم که می‌شود $\binom{2n}{n}$ از طرفی می‌دانیم:

$$\binom{2n}{n}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^2$$

نکته۲: در بسط $(x_1+\ldots+x_p)^n$ تعداد جملات عبارت است از: $\binom{n+p-1}{n}=\binom{n+p-1}{p-1}$

قضیه۱: تعمیم ترکیب

تعداد حالات مختلف تقسیم n عنصر متمایز در k دسته به‌طوری‌که در دسته اول $n_۱$ عضو، در دسته دوم $n_۲$ عضو و ...... در دسته kام n_k عضو قرار بگیرد، برابر است با:

$$\binom{n}{n_۱, n_۲, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_۱!n_۲!\ldots n_k!} \quad ; \quad n_۱ + n_۲ + \ldots + n_k = n$$

مثال۱۶ : اگر بخواهیم ۸ معلم جدید را بین ۴ مدرسه تقسیم کنیم چنانچه به هر مدرسه لازم باشد دو معلم اختصاص داده شود به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟

۱) ۶۵۰۰ ۲) ۳۷۴۰ ۳) ۲۵۲۰ ۴) ۲۲۸۵

حل: گرینه ۳.

$$\binom{۸}{۲,۲,۲,۲} = ۲۵۲۰$$

قضیه ۲ انطباق

اگر بخواهیم n توپ شماره‌گذاری شده از ۱ تا n را در n ظرف شماره‌گذاری شده از ۱ تا n قرار دهیم تعداد حالاتی که می‌توان این عمل را انجام داد به‌طوری‌که شماره هیچ توپی با شماره ظرف قرار گرفته یکسان نباشد برابر است با:

$$n!\sum_{k=۰}^{n}\frac{(-۱)^k}{k!}$$

مثال۱۷: به چند طریق می‌توان ۵ نامه را به تصادف در پاکت‌های آن‌ها جای داد به‌طوری‌که هیچ نامه‌ای در پاکت خودش نباشد؟

۱) ۴۴ ۲) ۲۴ ۳) ۱۲۰ ۴) ۹۶

حل: گزینه۱. طبق قضیه ۲:

$$۵!\left(\frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۴!} - \frac{۱}{۵!}\right) = ۶۰ - ۲۰ + ۵ - ۱ = ۴۴$$

مثال۱۸: فرض کنید ۱۰ نامه متعلق به ۱۰ پاکت از شماره ۱ تا ۱۰ به طور تصادفی داخل پاکت‌ها قرار داده شوند. در چند حالت نامه‌های شماره ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ در پاکت مربوط به خودشان قرار دارند؟

۱) $۵!\left(\frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۴!} - \frac{۱}{۵!}\right)$ ۲) $\frac{۱۰!}{۵!}\left(\frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۴!} - \frac{۱}{۵!}\right)$

۳) !۵   ۴) $\frac{5!}{10!}$

حل: گزینه ۳. با توجه به آنکه باید ۵ نامه باقی‌مانده در ۵ مکان جابه جا شود جواب !۵ است.

۱-۶ مدل توزیع توپ‌ها در جعبه‌ها

فرض کنید می‌خواهیم r توپ را در n جعبه متمایز به شماره‌های $1,2,3,\dots,n$ توزیع کنیم. بر اساس شرایط متفاوت توپ‌ها و تعداد توپی که در هر جعبه قرار می‌گیرد، مدل مربوط حالت‌های متفاوتی به خود می‌گیرد.

حالت ۱- تعداد حالات تقسیم یا توزیع r توپ متفاوت (متمایز) به n ظرف برابر است با n^r است زیرا هر هر توپ می‌تواند در هر یک از n ظرف قرار داده شود (ترتیب مهم نیست).

$$n\times n\times n\times\ldots\times n=n^r$$

مثال۱۹ : به چند طریق می‌توان ۴ توپ متفاوت را در ۳ ظرف متفاوت بدون محدودیت تقسیم کرد؟

حل: توپ اول به ۳ طریق، توپ دوم به ۳ طریق و توپ سوم و چهارم نیز به ۳ طریق می‌تواند در ظرف‌ها قرار بگیرند. $3\times 3\times 3\times 3=3^4$

حالت۲. *توپ‌ها متمایز باشند و در هر جعبه حداقل یک توپ برود* $(r\geq n)$. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^r$

حالت۳. توپ‌ها متمایز باشند و در هر جعبه حداکثر یک توپ برود $(r\leq n)$

توپ اول n انتخاب از جعبه‌ها دارد، توپ دوم $n-1$ انتخاب از جعبه‌ها و به همین ترتیب توپ rام دارای $n-r+1$ انتخاب از جعبه‌ها است بنابراین $n(n-1)....(n-r+)=\frac{n!}{(n-r)!}=P_n^r$

حالت ۴. توپ‌ها متمایز باشند و در r ظرف متمایز قرار بگیرند به‌طوری‌که در هر ظرف می‌تواند بیش از یک توپ قرار گیرد و ترتیب توپ‌ها درون جعبه‌ها مهم باشد. $P_{n+r-1}^r=\frac{(n+r-1)!}{(r-1)!}$

مثال۲۰: به چند طریق می‌توان ۵ پرچم متمایز را روی سه میله به اهتزاز درآورد؟

۱) $۵!$ ۲) $\frac{۵!}{۳!}$ ۳) $\frac{۷!}{۲!}$ ۴) ۲۵۰

حل: گزینه ۳. از آنجا که پرچم‌ها متمایزند و از نظر تداد محدودیتی نیست و ترتیب روی میله‌ها مهم است بنابراین $\frac{(۵+۳-۱)!}{(۳-۱)!}=\frac{۷!}{۲!}$

حالت۵. توپ‌ها نامتمایز باشند و در هر جعبه حداکثر یک توپ برود $(r \le n)$

این حالت مانند حالت ۳ است با این تفاوت که به دلیل نامتمایز بودن توپ‌ها باید تعداد حالت ۳ بر $r!$ تقسیم شود یعنی: $\frac{P_n^r}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}=C_n^r$

حالت۶. توپ‌ها نامتمایز باشند و در n ظرف متفاوت قرار بگیرند برابر است با:

$$\binom{r+n-۱}{n-۱}=\binom{r+n-۱}{r}$$

مثال۲۱: یک آسانسور ار طبقه همکف با ۸ مسافر حرکت کرده و تا طبقه ششم همه را پیاده می‌کند. اگر مسافران از نظر مسئول آسانسور یکسان باشند به چند طریق مختلف:

الف- او می‌تواند شاهد پیاده شدن مسافران باشد؟

ب- اگر ۵ نفر از مسافران مرد و ۳ نفر زن باشند به چند طریق او می‌تواند شاهد پیاده شدن مسافران باشد؟

حل الف- ۸ مسافر از نظر مسئول آسانسور یکسان هستند. $\binom{۸+۶-۱}{۸}=\binom{۱۳}{۸}=۱۲۸۷$

ب- $\binom{۵+۶-۱}{۵}\binom{۳+۶-۱}{۳}=\binom{۱۰}{۵}\binom{۸}{۳}$

مثال۲۲ : برای یک تابع n متغیره مانند $f(x_۱,x_۲,...,x_n)$ چند مشتق جزیی از مرتبه k ممکن است؟

۱) C_n^{k+n} ۲) C_n^k ۳) $C_{n-۱}^{k+n-۱}$ ۴) $C_{n-۱}^{k-۱}$

حل: گزینه ۳. می‌خواهیم k مشتق را بین n متغیر $x_1, x_2, \dots, x_n$ تقسیم کنیم. $\binom{n+k-1}{n-1}$

مثال۲۳ : به چند طریق می‌توان معادله $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=30$ را با اعداد صحیح و غیر منفی حل کرد. بطوریکه همگی مضرب ۳ باشند؟

۱) $\binom{15}{5}$ ۲) $\binom{34}{4}$ ۳) $\binom{14}{5}$ ۴) $\binom{14}{4}$

حل: گزینه ۴. اگر $y_i=\frac{x_i}{3}$ باشد، $y_1+y_2+y_3+y_4+y_5=10$ است. پس تعداد حالات $\binom{14}{4}$

حالت۷. توپ‌ها نامتمایز باشند و در هر جعبه حداقل k توپ برود. $\binom{r-kn+n-1}{n-1}$

حالت۸: توپ‌ها نامتمایز باشند و در هر جعبه حداکثر m توپ برود.

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{r-(m+1)k+n-1}{n-1}$$

۱–۷ سوالات کنکور

۱.ده نقطه مانند A و B،.. در یک صفحه انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که هیچ سه نقطه‌ای در امتداد یکدیگر قرار نگیرند بوسیله این نقاط چند خط می‌توان رسم کرد؟

۱) ۹۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۴۵ ۴) ۵

۲. تعداد راههایی که R مهره نامتمایز را می‌توان در N جعبه متمایز جا داد به طوری‌که هیچ جعبه‌ای خالی نباشد کدام است؟

۱) $\binom{R-1}{N-1}$ ۲) $\binom{N-1}{R-1}$ ۳) $(N-1)^{R-1}$ ۴) $(R-1)^{N-1}$

۳. ۸ دانشجوی مدیریت و ۴ دانشجوی رشته مخابرات وارد دانشگاهی می‌شوند، به چند طریق می‌توانند این دانشجویان در ۳ کلاس شرکت کنند به‌طوری که در هر کلاس حداقل یک دانشجوی مخابرات و یک دانشجوی مدیریت شرکت داشته باشد؟ (برق - ۷۷)

۱) ۲۱ ۲) ۶۳ ۳) ۱۲۰ ۴) ۶۰

۴. به چند طریق ۱۰ نفر می‌توانند برای بازی والیبال به دو گروه مساوی تقسیم شوند؟

۱) ۱۲۶ ۲) ۱۶۸ ۳) ۲۵۲ ۴) ۵۰۴

۵. در یک کلاس ۶۰ نفره، ۳۵ نفر مذکر می‌باشند. ۲۰ نفر از این افراد مذکر، کمتر از ۲۰ سال سن دارند و ۲۵ نفر از افراد کلاس حداقل ۲۰ سال سن دارند. در این کلاس چند نفر از جنس مونث ۲۰ سال یا بیشتر سن دارند؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۰ ۳) ۵ ۴) ۲۰

۱-۸ جواب تشریحی

۱. گزینه۳. $\binom{10}{2}=\frac{10\times 9}{2}=45$

۲. گزینه۱. تعداد راه‌هایی که R مهره نامتمایز را می‌توان در N جعبه متمایز جا داد به‌طوری‌که در هر جعبه حداقل یک مهره قرار گیرد برابر است با تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله $x_1+x_2+....+x_N=R$ که آن برابر است با $\binom{R-1}{N-1}$

نکته مهم: داوطلبین محترم توجه فرمایید که با تهیه این جزوات دیگر نیاز به خرید هیچ گونه کتاب مرجع دیگری نخواهید داشت. برای اطلاع از نحوه دریافت جزوات کامل با شماره های زیر تماس حاصل فرمایید.