فهرست مطالب:

مقدمه: ....

فصل ۱: مجموعه‌ها..

فصل ۲: دستگاه مختصات دکارتی و قطبی..

فصل ۳: تابع..

فصل ۴: حد و پیوستگی..

فصل ۵: مشتق و کاربرد آن...

فصل ۶: انتگرال و کاربرد آن...

فصل ۷: دنباله و سری..

فصل ۸: ماتریس...

فصل ۹: توابع چند متغیره..

منابع..

فصل اول: مجموعه ها

مقدمه

در این فصل با مفهوم مجموعه ها که یکی از مفاهیم پایه ای ریاضی است، آشنا می شویم. جرج کانتور ریاضیدان آلمانی بنیانگذار نظریه مجموعه ها در ریاضیات است.همچنین به معرفی مفهوم مجموعه، زیر مجموعه و اعمال روی مجموعه(اجتماع،اشتراک، تفاضل و تفاضل متقارن) خواهیم پرداخت و درباره جبر مجموعه ها بحث خواهیم کرد.

تعریف مجموعه

مجموعه: عبارت است از گروهی از اشیای کاملاً مشخص و دو به دو از هم متمایز که در خاصیتی با هم اشتراک دارند. منظور از شیء می تواند عدد، حروف و ... باشد، مانند مجموعه اعداد صحیح دو رقمی مضرب ۵ که معرف یک مجموعه است، زیرا **۱)** شرط کاملاً مشخص بودن را دارد یعنی برای هر عدد به وضوح می توان درباره عضو بودن یا نبودن آن در مجموعه تصمیم گرفت. مثلاً به وضوح می توان گفت ۲۵ عضو این مجموعه است، اما ۳۳ عضو این مجموعه نیست.**۲)** اعضای آن دو به دو از هم متمایزند.**۳)** در خاصیتی نیز (دو رقمی و مضرب ۵ بودن) با هم اشتراک دارند. اما مجموعه اعداد بزرگ معرف یک مجموعه نیست زیرا منظور آن از بزرگ بودن مشخص نیست و ما به طور دقیق نمی دانیم مثلاً عدد یک میلیون عضو این مجموعه هست یا خیر. همچنین مجموعه اعداد زوج، مجموعه ماشینهای ساخت یک کمپانی و مجموعه استانهای ایران مجموعه هایی را معرفی می کنند،اما گردایه پنج عدد متوالی کوچک معرف یک مجموعه نیست زیرا عناصر آن کاملاً مشخص نیستند.

مجموعه ها را معمولاً با حروف بزرگ لاتین مانند A ، B و C وعناصر تشکیل دهنده آنها را با حروف کوچک لاتین مثل a، b ، c و... نشان می دهند.

نکته: تکرار عناصر یک مجموعه تغییری در مجموعه ایجاد نمی کند و عناصری که بیش از یک بار در مجموعه تکرار شوند، تنها یک بار به حساب می آیند. به عنوان مثال $\{a\} = \{a, a, a\}$.

کدامیک از این مجموعه ها با هم برابرند: $\{a, b, c\}$، $\{a, a, a, b, c\}$، $\{a, a, b, b, c, c\}$ ؟

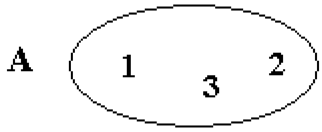
تمام این مجموعه ها با هم برابرند. تکرار یک عنصر از مجموعه آن مجموعه را تغییر نمی دهد.

نمایش مجموعههر مجموعه (مانند مجموعه A شامل مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر از ٤) را به سه صورتمی توان نمایش داد:

۱) نمایش تفصیلیدر این نمایش اعضای مجموعه بین دو آکولاد $\{\}$ قرار می‌گیرند،مانند$A = \{1, 2, 3\}$.

۲) نمایش هندسی (نمودار ون)در این نمایش اعضای مجموعه درونیک منحنیبسته قرار می گیرند:

مثا



۳) نمایش توصیفی (با علایم ریاضی)در این نمایش یک متغیر را به عنوان نماینده اعضای مجموعه اختیار می کنیم و اعضای مجموعه را با یک توصیف ریاضی صحیح به آن متغیر نسبت می دهیم:

$$A = \{t \mid t \in Z , 1 \leq t \leq 3\} = \{x \mid x \in N , 0 < x < 4\} .$$

بنابراین نمایش توصیفی یک مجموعه منحصر به فرد نیست.

مجموعه تهی: مجموعه ای است که هیچ عضوی ندارد و با $\{\}$ یا $\emptyset$ نشان داده می شود، مانند مجموعه $A = \{x \mid x \in N , x^2 + 1 = 0\}$. مجموعه تهی زیرمجموعه هر مجموعه ای است.

عضویت و عدم عضویت:در نظریه مجموعهها به ترتیب با نمادهای $\in$ و $\notin$نشان داده می شوند.

مثال :مجموعه $A = \{1, 2, 3, \{4\}\}$ را در نظر بگیرید. برای این مجموعه:

$1 \in A \ , \ \{4\} \in A \ , \ 4 \notin A .$

زیرمجموعه:دو مجموعه Aو Bرا در نظر بگیرید. مجموعه A را زیرمجموعه B می نامند هرگاه هر عضو A عضوی از B باشد و با نماد$A \subseteq B$نشان داده می‌شود. توجه کنید که زیرمجموعه هر مجموعه خود یک مجموعه است.

$A \subseteq B \iff \forall x : x \in A \Longrightarrow x \in B .$

نکته:اگر حداقل یک عضو درAوجود داشته باشدکه درBنباشد می گوییم A زیر مجموعهBنیست.

$A \nsubseteq B \iff \exists x : x \in A \land x \notin B .$

مثال : مجموعه های $A = \{1, 2, 3, \{4\}\}$ ، $B = \{1, 2, 3, 4\}$و$C = \{1, 2, 3, 4, \{4\}\}$ را در نظر بگیرید. برای این سه مجموعه روابط زیر برقرارند:

$$A \nsubseteq B \ , \ B \subseteq C \ , \ A \subseteq C \ , \ A \subseteq A .$$

زیرمجموعه محض:اگر $A \subseteq B$ و $A \neq B$ آنگاه مجموعهA را زیرمجموعه محضBمی نامیمو با نماد$A \subset B$نشان میدهیم.

برای مجموعه های مثال قبل روابط زیر برقرارند:

$A \not\subset B \ , \ B \subset C \ , \ A \subset C \ , \ A \not\subset A .$

تست: اگر $A = \{\emptyset\}$ ($\emptyset$ مجموعه تهی است) کدام یک از روابط زیر نادرست است؟ (ارشد ۹۲)

الف) $\emptyset \in A$ ب) $\emptyset \subseteq A$ ج) $A = \emptyset$ د) $A \subseteq A$

حل: گزینه ج صحیح است.

زیرا A مجموعه ای یک عضوی است و نمی تواند با $\emptyset$ که مجموعه ای بدون عضو است، برابر باشد.

تست: در صورتی که $A=\emptyset$ ($\emptyset$ مجموعه تهی است) در اینصورت کدام یک از گزینه های زیر غلط است؟ (ارشد ۹۶)

الف) $\emptyset \in A$ ب) $A=\emptyset$ ج) $\emptyset \subset A$ د) $A\subset A$

حل: گزینه الف صحیح است.

گزینه الف عضوی مانند برای مجموعه A قائل است در حالیکه A مجموعه تهی است و هیچ عضوی ندارد.

گزینه ب صحیح است چون فرض خود سؤال است. گزینه های ج و د به ازای هر مجموعه A همواره درست می باشند.

معرفی تعدادی از مجموعه های خاص

مجموعه اعداد طبیعی: $N=\{1,2,3,4,\dots\}$،

مجموعه اعداد صحیح: $Z=\{\dots,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$،

مجموعه اعداد گویا: $Q=\left\{\frac{a}{b}\mid a\in Z\,,b\in Z\,,b\neq 0\right\}$،

مجموعه اعداد حقیقی: $R=(-\infty,\infty)=\{\dots,-3,-2,-\sqrt{2},-1,0,\ln 2\,,1,2,\sqrt{5},3,\dots\}$،

مجموعه اعداد گنگ: $Q'=R-Q$، که داریم:

$$N\subset Z\subset Q\subset R \quad \text{و} \quad Q\cup Q'=R\,.$$

تعداد زیر مجموعه‌ها و زیر مجموعه‌های محض: اگر مجموعه A دارای n عضو باشد آنگاه تعداد زیرمجموعه‌های آن 2^n (هر عضو می تواند عضو زیرمجموعه باشد یا نباشد) و تعداد زیر مجموعه‌های محض آن 2^n-1 (مجموعه اصلی زیرمجموعه محض خودش نیست) می‌باشد. همچنین تعداد زیرمجموعه های m عضوی مجموعه A برابر است با:

$$\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}\,.$$

نکته: $n!$ (که n فاکتوریل خوانده می شود) برابر است با $n\times(n-1)\times(n-2)\times\dots\times 2\times 1$.

به عنوان مثال $5!=5\times 4\times 3\times 2\times 1=120$. همچنین $0!=1$.

تست: اگر $A=\{a,a,b\}$ آنگاه تعداد زیرمجموعه های A برابر است با: (ارشد ۹۵)

الف) 2 ب) 8 ج) 4 د) 16

حل: گزینه ج صحیح است.

چون اعضای تکراری مجموعه در شمارش یک بار به حساب می آیند، بنابراین $A=\{a,b\}$. لذا مجموعه A دارای $n=2$ و لذا $n^2=2^2=4$ زیرمجموعه می باشد.

تست: حاصل عبارت $\frac{2!}{0!}$ برابر است با: (ارشد ۹۰)

الف) 2 ب) $+\infty$ ج) $-\infty$ د) 1

حل: گزینه الف صحیح است.

$$\frac{2!}{0!} = \frac{2 \times 1}{1} = 2 \,.$$

مثال : مجموعه $A = \{a, b, c\}$ را در نظر بگیرید$(n = 3)$. زیرمجموعه های مجموعه A عبارتند از:

$\{\,\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$

که طبق تعریف بالا $2^3 = 8$ مجموعه می باشند. همچنین زیرمجموعه های محض مجموعه A عبارتند از:

$$\{\,\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$$

که طبق تعریف بالا $2^3 - 1 = 7$ مجموعه می باشند. همچنین تعداد زیرمجموعه های یک عضوی A برابر است با:

$$\binom{3}{1} = \frac{3!}{1!\,(3-1)!} = \frac{3!}{1!\,2!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 1} = 3 \,.$$

مثال : اگر داشته باشیم $A = \{a, b, c\}$، $C = \{a, b, c, d, e, f, g\}$، و $A \subset B \subset C$، در اینصورت به جای B چند مجموعه پنج عضوی می توان قرار داد؟

حل:تعداد اعضای مجموعه B از تعداد اعضای مجموعه A (۳) بیشتر و از تعداد اعضای مجموعه C (۷) کمتر است. لذا مجموعه B مجموعه ای است که شامل اعضای A است و از بین $\{d, e, f, g\}$ نیز دو عنصر را می تواند اختیار کند. بنابراین:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1} = 6 \,.$$

مثال : یک مجموعه دارای nعضو است. به این مجموعه ۳ عضو متمایز از اعضای مجموعه اضافه می شود. تعداد زیرمجموعه های آن چند برابر می شود؟

تعداد عناصر یک مجموعه n عنصری 2^n است. به این مجموعه ۳ عنصر متمایز از اعضای مجموعه اضافه می شود، یعنی تعداد عضوهای مجموعه جدید $n + 3$ است. پس تعداد زیرمجموعه های آن برابر است با 2^{n+3}.

$$2^{n+3} = 2^n \times 2^3 = 8 \times 2^n \,.$$

بنابراین تعداد زیرمجموعه های آن ۸ برابر می شود.

تست: اگر مجموعه A دارای 5 عضو باشد تعداد زیرمجموعه های سه تایی آن چه مقدار است؟(ارشد ۹۱)

الف) 32ب) 60 ج) 10 د) 20

حل: گزینه ج صحیح است.

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = 10 \,.$$

تست: کدام یک از مقادیر زیر برابر $\binom{15}{5}$ نمی باشد؟ (ارشد ۹۱)

الف) $\binom{15}{10}$ ب) $3\binom{14}{4}$ ج) $\binom{14}{5}+\binom{14}{4}$ د) $15\binom{14}{5}$

حل: گزینه د صحیح است.

$$\binom{15}{5}=\frac{15\times14\times13\times12\times11\times10!}{5!\,(15-5)!}=\frac{15\times14\times13\times12\times11\times10!}{5!\times10!}$$
$$=\frac{15\times14\times13\times12\times11}{5\times4\times3\times2\times1}=\frac{3\times7\times13\times11}{1}=3003$$

که در محاسبه آن تا حد ممکن اعداد را از صورت و مخرج با هم ساده کرده ایم. حال به بررسی گزینه ها می پردازیم.

$$\text{الف}:\ \binom{15}{10}=\frac{15\times14\times13\times12\times11\times10!}{10!\,(15-10)!}$$
$$=\frac{15\times14\times13\times12\times11\times10!}{5!\times10!}$$

که با بررسی تساوی دوم $\binom{15}{5}$ واضح است که با آن برابر است.

$$\text{ب}:\ 3\binom{14}{4}=\frac{3\times14\times13\times12\times11\times10!}{4!\,(14-4)!}=\frac{3\times14\times13\times12\times11\times10!}{4!\times10!}$$

اگر این عبارت با تساوی دوم $\binom{15}{5}$ برابر باشد باید داشته باشیم:

$$\frac{15\times14\times13\times12\times11\times10!}{5!\times10!}=\frac{3\times14\times13\times12\times11\times10!}{4!\times10!}$$
$$\frac{15}{5!}=\frac{3}{4!}\ \Longrightarrow\ \frac{15}{5\times4!}=\frac{3}{4!}\ \Longrightarrow\ \frac{3}{4!}=\frac{3}{4!}$$

پس گزینه ب نیز با $\binom{15}{5}$ برابر است.

$$\text{ج}:\ \binom{14}{5}+\binom{14}{4}=\frac{14\times13\times12\times11\times10\times9!}{5!\,(14-5)!}+\frac{14\times13\times12\times11\times10!}{4!\,(14-4)!}$$
$$=\frac{14\times13\times12\times11\times10}{5\times4\times3\times2\times1}+\frac{14\times13\times12\times11}{4\times3\times2\times1}$$
$$=\frac{7\times13\times11\times2}{1}+\frac{7\times13\times11}{1}=2002+1001=3003$$

پس گزینه ج نیز با $\binom{15}{5}$ برابر است.

$$\text{د}:\ 15\binom{14}{5}=\frac{15\times14\times13\times12\times11\times10\times9!}{5!\,(14-5)!}$$
$$=\frac{15\times14\times13\times12\times11\times10}{5\times4\times3\times2\times1}=\frac{3\times7\times13\times11\times10}{1}=30030$$

مجموعه توانی A : مجموعه شامل کلیه زیر مجموعه های مجموعه A را مجموعه توانی A گویند و بانماد $P(A)$ نمایش می دهند.

مثال: مجموعه توانی $A=\{a,b,c\}$ به صورت زیر است:

$$\mathrm{P(A)}=\{\{\,\},\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}.$$

ملاحظه می کنید که تعداد اعضای مجموعه توانی A به تعداد زیرمجموعه های A و برابر با 2^n است.

مثال: اگر $A=\emptyset$ مجموعه توانی A را به دست آورید. اگر مجموعه B برابر با مجموعه توانی A باشد، مجموعه توانی B را به دست آورید.

مجموعه تهی هیچ عضوی ندارد. لذا مجموعه توانی تهی $2^0=1$ عضو دارد.

$$P(\emptyset)=\{\emptyset\}$$

همچنین مجموعه Bیک عضو (مجموعه تهی) دارد. لذا مجموعه توانی B دارای $2=2^1$ عضو است.

$$P(B)=P\big(P(\emptyset)\big)=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$$

تست: اگر $A=\emptyset$ و $P(A)$ مجموعه توانی A باشد، کدام یک از رابطه های زیر صحیح است؟ (ارشد ۹۵)

الف) $\emptyset=A$ ب) $P(A)\subset\emptyset$ ج) $A\subset\emptyset$ د) $\emptyset\subset A$

حل: گزینه د صحیح است.

در اینجا $P(A)=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$. یادآوری می شود $\emptyset$ زیرمجموعه تمام مجموعه هاست.

مثال : آیا $P(A)\cup P(B)=P(A\cup B)$ برقرار است؟

برقرار نیست. فرض کنید $A=\{1\}$ و $B=\{2\}$. در اینصورت:

$$\begin{aligned}&P(A)=\{\emptyset,\{1\}\}\\&P(B)=\{\emptyset,\{2\}\}\end{aligned}\implies P(A)\cup P(B)=\{\emptyset,\{1\},\{2\}\}$$
$$P(A\cup B)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}.$$

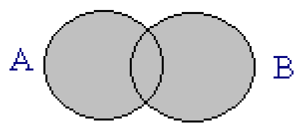
لذا $P(A)\cup P(B)\neq P(A\cup B)$.

اعمال روی مجموعه ها

اعمالی که می توان بر مجموعه ها تعریف کردبه صورت زیر می باشند:

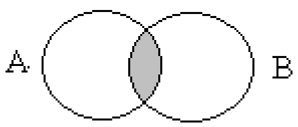
اجتماع دو مجموعه: اجتماع دو مجموعه A و B مجموعه ای است که اعضای آن متعلق به A یا متعلق بهBباشند:

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\ \vee\ x\in B\}$$



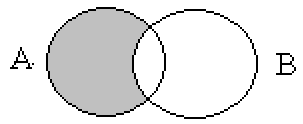
اشتراک دو مجموعه: اشتراک دو مجموعه A و B مجموعه ای است که اعضای آن هم متعلق بـه A و هم متعلق به B باشند:

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\ \wedge\ x\in B\}$$



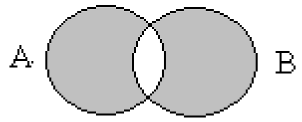
تفاضل دو مجموعه: تفاضل دو مجموعه A و B مجموعه ای است که اعضای آن عناصری از Aهستند که در B قرار ندارند:

$$A - B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$$



تفاضل متقارن دو مجموعه: تفاضل متقارن دو مجموعه A و B مجموعه ای است که اعضای آن تنها در یکی از مجموعه های A یا B باشند:

$$A\Delta B = \{x \mid x \in (A-B) \ \vee \ x \in (B-A)\}$$
$$= \{x \mid x \in (A \cup B) - (A \cap B)\}$$



مثال:دو مجموعه $A = \{1,2,a,b\}$ و$B = \{1,4,a,d\}$را در نظر بگیرید. برای این دو مجموعه داریم:

$$A \cup B = \{1,2,4,a,b,d\} \qquad A \cap B = \{1,a\}$$
$$A - B = \{2,b\} \qquad B - A = \{4,d\}$$
$$A\Delta B = \{2,4,b,d\}$$

تساوی دو مجموعه: دو مجموعه A و B با هم مساوی اند هرگاه A زیرمجموعه B و B زیرمجموعه A باشد.

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad (A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq A).$$

دو مجموعه $A = \{a,b,c\}$ و $B = \{a,a,b,b,c,c,c\}$ با هم مساوی اند.

مجموعه مرجع: در مباحث مربوط به مجموعه ها تمام مجموعه ها را زیرمجموعه یک مجموعه بزرگ به نام مجموعه مرجع در نظر می گیرند و آن را با M یا U نشان می دهند.

متمم یک مجموعه: اگر M مجموعه مرجع و A مجموعه ای دلخواه باشد، متمم مجموعه A نسبت به مرجع را با A' یا A^c نشان می دهند که صورت زیر تعریف می شود:

$$A' = \{x \mid x \in M \ \wedge x \notin A\}.$$

مثال : متمم مجموعه $A = \{x,y,z\}$ نسبت به مجموعه مرجع $M = \{x,y,z,w,r,s,t\}$ برابر است با

$A' = \{w,r,s,t\}$.

نکته: به ازای دو مجموعه دلخواه A و B داریم $A \subset B$ اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

1) $A \cap B = A$, 2) $B' \subset A'$, 3) $B \cup A' = M$,
4) $A \cup B = B$, 5) $A \cap B' = \emptyset$.

ویژگیهای متمم یک مجموعه: اگر A و B دو مجموعه دلخواه و M مجموعه مرجع باشد:

1) $(A')' = A$ 2) $M' = \emptyset$ 3) $\emptyset' = M$
4) $A \subseteq B \Longrightarrow B' \subseteq A'$ 5) $A = B \Longrightarrow A' = B'$

ویژگیهای اجتماع دو مجموعه:

1) $A \cup A = A$ 2) $A \cup \emptyset = A$ 3) $A \cup M = M$
4) $A \cup A' = M$ 5) $A \subseteq (A \cup B)$

ویژگیهای اشتراک دو مجموعه:

1) $A \cap A = A$ 2) $A \cap \emptyset = \emptyset$ 3) $A \cap M = A$
4) $A \cap A' = \emptyset$ 5) $(A \cap B) \subseteq A$

ویژگیهای تفاضل دو مجموعه:

1) $A - A = \emptyset$ 2) $A - \emptyset = A$ 3) $\emptyset - A = \emptyset$
4) $M - A = A'$ 5) $A - M = \emptyset$ 6) $A - A' = A$
7) $A - B = A \cap B'$

مثال:اگر A ، B و Cسه مجموعه باشند، به طوری که$A \subseteq B \subseteq C$، آنگاه مجموعه معادل با عبارت $(A - B) - C$ را به دست آورید.

$$A \subseteq B \implies A - B = \emptyset$$
$$(A - B) - C = \emptyset - C = \emptyset\,.$$

مثال: اگر $A \cup B = A \cup C$ آیا می‌توان نتیجه گرفت $B = C$ ؟

خیر. فرض کنید $A = \{a, b, c\}$، $B = \{d, e, f\}$ و $C = \{a, d, e, f\}$. دراینصورت:

$$A \cup B = A \cup C = \{a, b, c, d, e, f\}\,,$$

اما $B \neq C$.

مثال: اگر $A \cap B = A \cap C$ آیا می‌توان نتیجه گرفت $B = C$؟

خیر. فرض کنید $A = \{a, b, c\}$، $B = \{a, d, e\}$ و $C = \{a, f\}$. دراینصورت:

$$A \cap B = A \cap C = \{a\}$$

اما $B \neq C$.

عدد اصلی یک مجموعه تعداد اعضای یک مجموعه را عدد اصلی آن مجموعه می نامند و با $n(A)$ نشان می دهند. عدد اصلی مجموعه های نامتناهی تعریف نشده است و عدد اصلی مجموعه تهی صفر است.

اگر داشته باشیم $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 4, 6\}$ ، آنگاه:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}\ ,\ \ A \cap B = \{2\}$$

بنابراین $n(A) = 3$ ، $n(B) = 3$ ، $n(A \cup B) = 5$ و $n(A \cap B) = 1$. برای این مجموعه ها داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \implies 5 = 3 + 3 - 1\,.$$

این قانون در حالت کلی نیز برقرار است.

1) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
2) $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

مثال : از بین دانشجویان فارغ التحصیل رشته A در یک دانشگاه ۴۰ نفر در آزمون کارشناسی ارشد رشته A و ۲۵ نفر در آزمون رشته B و ۱۵ نفر در هر دو آزمون شرکت کرده اند. چند دانشجو حداقل در یکی از دو آزمون شرکت کرده اند؟

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \implies n(A \cup B) = 40 + 25 - 10 = 55 .$$

لذا ۵۵ نفر حداقل در یکی از دو آزمون شرکت کرده اند.

مثال : مجموعه های A و B به ترتیب با ۱۰ و ۱۵ عضو را در نظر بگیرید. اگر مجموعه $A - B$ دارای ۵ عضو باشد، مجموعه $B - A$ چند عضو دارد؟

با توجه به داده های مسأله داریم:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) \implies 5 = 10 - n(A \cap B) \implies n(A \cap B) = 5 .$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 15 - 5 = 10 .$$

تست: اگر A و B دو مجموعه غیرتهی باشند کدام یک از روابط زیر صحیح است؟ (ارشد ۹۵)

الف) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ب) $(A \cup B)' = A' \cup B'$

ج) $(A \cap B)' = A' \cap B'$ د) $(A \cap B)' = A' \cap (B - A)$

حل: گزینه الف صحیح است.

قانون دمرگان است.

حاصلضرب دکارتی دو مجموعه

مجموعه تمام زوجهای مرتب (a, b) که مؤلفه اول آن متعلق به A و مؤلفه دوم متعلق به B می باشد را حاصلضرب دکارتی A در B می نامند و با نماد $A \times B$ نمایش می دهند:

$$A \times B = \{(a, b) :\ a \in A , b \in B\}$$

مثال : به ازای دو مجموعه $A = \{a, b\}$ و $B = \{1, 2, 3\}$ داریم:

$$A \times B = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)\}$$
$$B \times A = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\}$$

نکته: دو زوج مرتب تنها در صورتی با هم برابرند که عناصر آنها نظیر به نظیر برابر باشند.

$$(a, b) = (s, t) \iff a = s , b = t .$$

بنابراین اگر $A \neq B$ آنگاه:

$$A \times B \neq B \times A$$

نکته: اگر مجموعه A دارای m عضو و مجموعه B دارای n عضو باشد، آنگاه مجموعه $A \times B$ دارای $m.n$ عضو و مجموعه $A^n = A \times A \times \dots A$ دارای m^n عضو می باشند.

مثال : اگر $A = \{a, b\}$ و $B = \{1, 2, 3\}$ ، تعداد اعضای A^4 ، B^3 و $A^4 \times B^3$ را به دست آورید.

$$n(A^4) = 2^4 = 16 \quad , \quad n(B^3) = 3^3 = 27 \quad , \quad n(A^4 \times B^3) = 2^4 \times 3^3 = 432 .$$

افراز یک مجموعه

مجموعه ناتهی A را در نظر بگیرید. منظور از افراز A مجموعه ای مانند B با اعضای $A_n, \ldots, A_2, A_1$ است که تمام عناصر آن زیرمجموعه های A می باشند و در شرایط زیر صدق می کنند:

۱) هر یک از مجموعه های A_i ناتهی باشند.

۲) هر دو عضو A از هم جدا باشند؛ یعنی به ازای $A_i \in B$ و $A_j \in B$ و $A_i \neq A_j$ داشته باشیم $A_i \cap A_j = \emptyset$.

۳) اجتماع تمام اعضای B برابر A باشد؛ یعنی $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$.

مثال: مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ را در نظر بگیرید. $\{c\}, \{a, b, d\}$ یک افراز این مجموعه است، اما $\{c, d\}, \{a, b\}, \{\,\}$ و همچنین $\{a, b\}, \{b, c, d\}$ افراز این مجموعه به حساب نمی آیند.

تمرینات

۱) کدامیک از توصیف‌های زیر، مجموعه‌ای را مشخص می‌کند:

۱) اعداد اول کوچکتر از 50　　　۲) پزشکان معروف ایران

۳) دانش‌آموزان ممتاز ایران　　　٤) اعداد طبیعی مضرب 5

حل: گزینه های (۱) و (٤) صحیح هستند.

یکی از شرایط مجموعه «کاملاً مشخص» بودن عناصر آن است که گزینه های ۲ و ۳ بـه علـت وجـود واژه های کیفی «معروف» و «ممتاز» فاقد این شرط هستند.

۲) کدامیک از گزاره های زیر نادرست است؟

۱) $\emptyset = \{\emptyset\}$　　۲) $\emptyset \in \{\emptyset\}$　　۳) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$　　٤) $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

حل: گزینه (۱) صحیح است.

۳) مجموعه های A و B به ترتیب ۱۰ و ۱۵ عضو دارند. اگر مجموعه A-B دارای ۵ عضو باشد، مجموعه B-A چند عضو دارد؟

۱) ۱۰ عضو　　۲) ۵ عضو　　۳) ۲۵ عضو　　٤) صفر عضو

حل: گزینه (۱) صحیح است.

$$n(A-B) = n(A) - n(A\cap B) \implies 5 = 10 - n(A\cap B) \implies n(A\cap B) = 5$$
$$n(B-A) = n(B) - n(A\cap B) \implies n(B-A) = 15 - 5 = 10$$

٤) اگر A و B دو مجموعه ی ناتهی باشد مجموعه $A-(A\cap B)$ کدام است؟

۱) $A\cap B$　　۲) $A\cap B'$　　۳) $B\cap A'$　　٤) $(A\cup B)'$

حل: گزینه (۲) صحیح می باشد.

راه حل اول :

$$A-(A\cap B) = A\cap(A\cap B)' = A\cap(A'\cup B') = (A\cap A')\cup(A\cap B')$$
$$= \phi\cup(A\cap B') = A\cap B'$$

راه حل دوم :

با فرض $A=\{٦,٢\}$ و $B=\{٢,٣\}$ داریم :

$$A-(A\cap B) = \{٦,٢\}-\{٢\} = \{٦\} = A\cap B'$$

۵) در مجموعه جهانی $U = \{x \mid x \in N , x \le 15\}$ اگر A مجموعه اعداد فرد و B مجموعه اعداد بخش پذیر بر ۳ باشد، مجموعه $(A\cap B)$ چند زیرمجموعه دارد؟

۱) ۱۲　　۲) ۳　　۳) ٦　　٤) ٨

حل: گزینه (٤) صحیح است.

$$U = \{1, 2, 3, \ldots, 15\} \;,\; A = \{1, 3, 5, \ldots, 15\} \;,\; B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$$

در نتیجه:

$$A \cap B = \{3, 9, 15\}$$

پس تعداد زیرمجموعه ها برابر $2^3 = 8$ است.

۶) از بین دانشجویان رشته بهداشت یک دانشگاه، ۳۰ نفر در آزمون تافل ، ۲۰ نفر در آزمون آیلتس و ۱۰ نفر در هر دو آزمون شرکت کرده اند. چند نفر از این دانشجویان حداقل در یکی از این دو آزمون شرکت کرده اند.

۱) ۴۰ **۲)** ۵۰ **۳)** ۵۵ **۴)** ۶۰

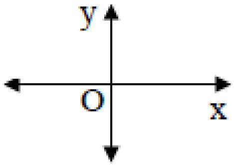
حل: گزینه (۱) صحیح می باشد.

$$n(M \cup A) = n(M) + n(A) - n(A \cap M) = ۳۰ + ۲۰ - ۱۰ = ۴۰$$

۴۰ نفر از دانشجویان حداقل در یکی از دو آزمون شرکت کرده اند.

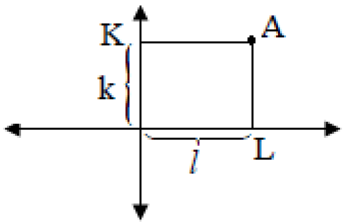
فصل دوم: دستگاه مختصات دکارتی و قطبی

دستگاه مختصات زیر را در نظر بگیرید:

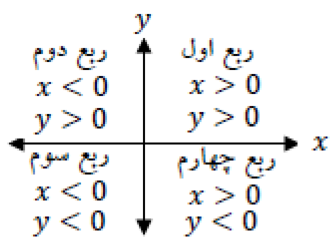


این دستگاه متشکل از یک محور افقی به نام محور طول ها یا محور x ها و یک محور قائم به نام محور عرض ها یا محور y ها می باشد. محل برخورد این دو محور را مبدأ مختصات می نامیم و با O نشان می دهیم. اگر محور y ها را خطی در نظر بگیریم که صفحه را به دو ناحیه تقسیم می کند، ناحیه سمت راست شامل نقاطی از صفحه است که دارای طول مثبت و ناحیه سمت چپ شامل نقاطی از صفحه است که دارای طول منفی می باشند. همچنین نقاط روی محور y ها نقاطی از صفحه می باشند که طول آنها ۰ است. به طور مشابه اگر محور x ها را خطی در نظر بگیریم که صفحه را به دو ناحیه تقسیم می کند، ناحیه بالایی شامل نقاطی از صفحه است که دارای عرض مثبت و ناحیه پایینی شامل نقاطی از صفحه است که دارای عرض منفی می باشند. همچنین نقاط روی محور x ها نقاطی از صفحه می باشند که عرض آنها ۰ است.

فرض کنید A نقطه دلخواهی در صفحه xoy باشد. برای تعیین مختصات نقطه Aخطی از این نقطه به محور x ها عمود می کنیم. فرض کنید این خط محور x ها را در L قطع کند. در اینصورت فاصله $OL = l$ روی محور x ها را طول نقطه A می نامند. همچنین خطی از نقطه A به محور y ها عمود می کنیم. فرض کنید این خط محور y ها را در K قطع کند. در اینصورت فاصله $OK = k$ روی محور y ها را عرض نقطه A می نامند. بنابراین A نقطه ای در صفحه xoy با طول l و عرض k می باشد. l و k را مختصات دکارتی نقطه A می نامیم و با $A(l, k)$ نشان می دهیم.



محورهای مختصات صفحه xoy را به چهار ناحیه (ربع) تقسیم می کنند. به ازای زوج مرتب (x, y) داریم:



نکته : فاصله دو نقطه $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ در صفحه xoy برابر است با:

$$d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ .$$

مثال : نوع مثلث متشکل از نقاط $A(-1,3)$ ، $B(-1,-2)$ و $C(1,2)$ را تعیین کنید.

ابتدا اندازه هر سه ضلع را به دست می آوریم. اگر اندازه سه ضلع با هم برابر باشد متساوی الاضلاع، اگر اندازه دو ضلع با هم برابر باشد متساوی الساقین، اگر در رابطه فیثاغورس (ضلع بزرگتر به توان ۲ برابر است با مجموع توان دوم دو ضلع کوچکتر) صدق کند قائم الزاویه و در غیر از این سه حالت مختلف الاضلاع می باشد.

$$d(A,B)=\sqrt{(-1+1)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{0+25}=5$$
$$d(A,C)=\sqrt{(1+1)^2+(2-3)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$$
$$d(B,C)=\sqrt{(1+1)^2+(2+2)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$$

ملاحظه می شود که مثلث متساوی الاضلاع و متساوی الساقین نیست. قائم الزاویه بودن آن را بررسی می کنیم. ضلع بزرگ مثلث ضلع AB است. لذا رابطه $(AB)^2=(AC)^2+(BC)^2$ را بررسی می کنیم. چون $(AB)^2=(5)^2=25$ ، $(AC)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2=5$ و $(BC)^2=\left(\sqrt{20}\right)^2=20$ ، لذا تساوی رابطه فیثاغورس برقرار است. بنابراین مثلثABC قائم الزاویه است.

نکته: مختصات نقطه وسط پاره خط AB با $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ (که آن را نقطه E می نامیم) برابر است با:

$$E(x_E,y_E)=E\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2),\frac{1}{2}(y_1+y_2)\right).$$

مثال: مختصات نقطه وسط پاره خط AB با $A(2,-4)$ و $B(-2,6)$ را به دست آورید.

$$E\left(\frac{1}{2}(2-2),\frac{1}{2}(-4+6)\right)=E(0,1)\ .$$

نکته: اگر اندازه ضلع یک مربع برابر a باشد، قطر مربع برابر است با $a\sqrt{2}$.

مثال: قطر مربعی که پاره خط AB با $A(3,2)$ و $B(-1,6)$ یک ضلع آن است را به دست آورید.

$$a=d(A,B)=\sqrt{(-1-3)^2+(6-2)^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}$$

لذا اندازه قطر مربع برابر است با $a\sqrt{2}=\sqrt{32}\times\sqrt{2}=8$.

انتقال محورهای مختصات

اگر مبدأ مختصات دستگاه xoy را از نقطه $(0,0)$ به نقطه (a,b) منتقل کنیم و دستگاه جدید را XOY بنامیم، مختصات نقطه (x,y) نسبت به مبدأ جدید برابر است با $(X,Y)=(x-a,y-b)$.

مثال : مختصات نقطه $(3,5)$ در دستگاهی که مبدأ آن از $(0,0)$ به $(-1,2)$ منتقل شده است را به دست آورید.

$$(X,Y)=(3+1,5-2)=(4,3)\,.$$

معادله خط

معادله خط گذرنده از نقاط $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ برابر است با:

$$y-y_1=m(x-x_1) \text{ یا } y-y_2=m(x-x_2)\,,$$

که در آن m شیب خط است که از رابطه زیر به دست می آید:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\,.$$

مثال : معادله خط گذرنده از نقاط $A(-1,4)$ و $B(3,2)$ را به دست آورید.

ابتدا شیب خط را به دست می آوریم:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2-4}{3-(-1)}=-\frac{1}{2}\,,$$

بنابراین معادله خط AB به صورت زیر است:

$$y-4=-\frac{1}{2}(x+1)\ \Rightarrow\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}\,.$$

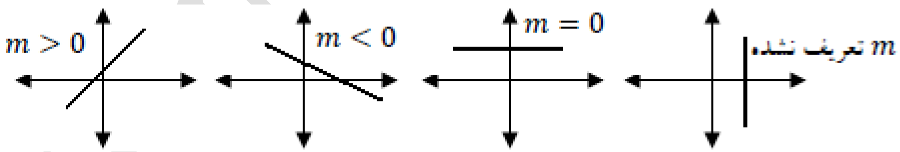
مثال : کدام یک از نقاط $C(1,3)$ و $D(-1,-2)$ روی خط گذرنده از نقاط $A(-1,4)$ و $B(3,2)$ به دست آمده در مثال قبل قرار دارند؟

نقاط را در معادله خط جایگذاری می کنیم. اگر در معادله خط صدق کنند روی خط مورد نظر قرار دارند.

$C(1,3)\quad : 3=-\frac{1}{2}(1)+\frac{7}{2}\quad :$ این نقطه روی خط قرار دارد .

$D(-1,-2)\ :\ -2=-\frac{1}{2}(-1)+\frac{7}{2}\quad :$ این نقطه روی خط قرار ندارد .

نکته : شیب یک خط ممکن است مثبت، منفی، صفر و تعریف نشده باشد.



قضیه : دو خط L_1 و L_2 به ترتیب با شیبهای m_1 و m_2:

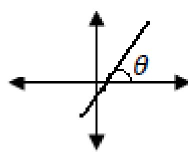
الف) با هم موازی اند اگر و تنها اگر $m_1=m_2$.

ب) بر هم عمودند اگر و تنها اگر $m_1\times m_2=-1$.

مثال : خطی موازی با $y=3x-5$ بیابید که از نقطه $(-1,1)$ عبور کند.

$$y-1=3(x+1)\ \ \Rightarrow\ \ y=3x+4\,.$$

نکته : شیب خط را می توان به تعبیر کرد که زاویه ای است که خط با جهت مثبت محور x ها می سازد.



$$m=\tan\theta\ \ ;\ \ 0\le\theta\le 180\,.$$

مثال : شیب خطی را به دست آورید که با جهت مثبت محور x ها زاویه الف) 45° ، ب) 150° می سازد.

الف) $m = \tan 45 = 1\,.$

ب) $m = \tan 150 \overset{(1)}{=} \tan(180 - 30) \overset{(2)}{=} -\tan 30 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\,.$

نکته: اگر $90 < \alpha < 180$ برای به دست آوردن نسبتهای مثلثاتی زاویه α به صورت زیر عمل می کنیم:

$1)\ \sin\alpha = \sin(\pi - \theta) = -\sin\theta \qquad 2)\ \cos\alpha = \cos(\pi - \theta) = \cos\theta$

$3)\ \tan\alpha = \tan(\pi - \theta) = -\tan\theta \qquad 3)\ \cot\alpha = \cot(\pi - \theta) = -\cot\theta$

مثال: حاصل عبارتهای مثلثاتی زیر را به دست آورید.

الف) $\sin 150^{\circ} = \sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$

ب) $\cos 120^{\circ} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

ج) $\tan 135^{\circ} = \tan\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$

د) $\cot 150^{\circ} = \cot\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \cot\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\cot\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}\,.$

طول از مبدأ و عرض از مبدأ

برای به دست آوردن طول از مبدأ معادله خط $y = ax + b$ قرار می دهیم:

$$y = 0 \implies ax + b = 0 \implies x = -\frac{b}{a}.$$

همچنین برای به دست آوردن عرض از مبدأ معادله خط $y = ax + b$ قرار می دهیم:

$$x = 0 \implies y = a(0) + b \implies y = b\,.$$

مثال : طول از مبدأ و عرض از مبدأ معادله خط $y = -2x - 6$ را به دست آورید.

طول از مبدأ : $x = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{-6}{-2} = -3\,.$

عرض از مبدأ : $y = b = -6\,.$

تست: شیب و عرض از مبدأ خط $3y - 2x + 4 = 0$ به ترتیب عبارت است از:

الف) شیب ۲ و عرض از مبدأ -4 ب) شیب -4 و عرض از مبدأ 2

ج) شیب $\frac{2}{3}$ و عرض از مبدأ $-\frac{4}{3}$ د) شیب $-\frac{4}{3}$ و عرض از مبدأ $\frac{2}{3}$

حل: گزینه ج صحیح است.

$$3y - 2x + 4 = 0 \implies 3y = 2x - 4 \implies y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$$

ضریب x شیب خط را به ما می دهد، بنابراین $m = \frac{2}{3}$. همچنین عرض از مبدأ این خط به صورت زیر به دست می آید:

$$\text{عرض از مبدأ} : y = b = -\frac{4}{3}.$$

نقطه برخورد دو خط : برای به دست آوردن نقطه برخورد دو خط $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ و $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ دو معادله را به صورت یک دستگاه دو معادله و دو مجهول می نویسیم:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

یکی از معادلات را در عددی ضرب می کنیم تا ضریب یکی از مجهولات در دو معادله قرینه یکدیگر شوند. سپس دو معادله را با هم جمع می کنیم و از تک معادله و تک مجهول باقیمانده مقدار یکی از دو مجهول به دست می آید. سپس با جایگذاری مقدار مجهول به دست آمده در یکی از معادلات مجهول دوم به دست می آید.

مثال: نقطه برخورد دو خط $3x - 4y - 11 = 0$ و $6x + 2y - 2 = 0$ را به دست آورید.

$$\begin{cases} 3x - 4y = 11 \\ 6x + 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad -2 \times \begin{cases} 3x - 4y = 11 \\ 6x + 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x + 8y = -22 \\ \ \ 6x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 0 + 10y = -20 \quad \Rightarrow \quad y = -2 \quad \Rightarrow \quad x = 1 .$$

لذا $(1, -2)$ نقطه برخورد این دو خط است.

تعیین ریشه یک معادله درجه دوم

برای تعیین ریشه های یک معادله درجه دوم به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ از روش دلتا استفاده می کنیم به این صورت که مقدار $\Delta = b^2 - 4ac$ را محاسبه می کنیم. سه حالت پیش می آید:

الف) اگر $\Delta > 0$ معادله دارای دو ریشه متمایز است که از رابطه زیر به دست می آیند:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} .$$

مثال: ریشه های معادله $3x^2 + 9x + 6 = 0$ را به دست آورید.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (9)^2 - 4 \times 3 \times 6 = 81 - 72 = 9 > 0$$

بنابراین معادله دارای دو ریشه است که به صورت زیر به دست می آیند:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 \pm \sqrt{9}}{2 \times 3} = -2 \quad , \quad -1 .$$

ب) اگر $\Delta = 0$ معادله دارای یک ریشه مضاعف است که از رابطه زیر به دست می آیند:

$$x_1 = \frac{-b}{2a} .$$

مثال: ریشه های معادله $x^2 - 6x + 9 = 0$ را به دست آورید.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 36 - 36 = 0 .$$

بنابراین معادله دارای یک ریشه است که به صورت زیر به دست می آید:

$$x_1=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-6)}{2\times 1}=3\,.$$

ج) اگر $\Delta<0$ معادله ریشه حقیقی ندارد.

تست: اگر $\frac{1}{y}+y=2$ باشد مقدار عبارت $y^4+\frac{1}{y^4}+y^2+\frac{1}{y^2}$ کدام است؟ (ارشد ۹۱)

الف) 24 ب) 20 ج) 4 د) 36

$$\frac{1}{y}+y=2\ \overset{\times y}{\Longrightarrow}\ y^2-2y+1=0$$

حال از روش دلتا ریشه های معادله را به دست می آوریم:

$$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times 1\times 1=4-4=0\,.$$

بنابراین معادله دارای یک ریشه است که به صورت زیر به دست می آید:

$$y=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-2)}{2\times 1}=1\ .$$

با جایگذاری در رابطه $y^4+\frac{1}{y^4}+y^2+\frac{1}{y^2}$ نتیجه می شود:

$$(1)^4+\frac{1}{(1)^4}+(1)^2+\frac{1}{(1)^2}=1+1+1+1=4\ .$$

تست: جواب های معادله $x^2-2|x|-3=0$ کدام اند؟ (ارشد ۹۱)

الف) $-1,3$ ب) $-1,3,-3$ ج) $-1,-3$ د) $-3,3$

حل: گزینه د صحیح است. کافی است اعداد گزینه ها را در تابع جایگذاری کنیم!

نکته: اگر بخواهیم k شخص را به طرق مختلف دور یک میز گرد بنشانیم، کافی است یک نفر در روی یکی از این k صندلی ثابت بنشیند و $k-1$ شخص دیگر را روی سایر صندلی ها جابجا کنیم. چون $k-1$ شخص باقیمانده را می توان به $(k-1)!$ روش مختلف روی صندلی ها قرار داد، لذا اگر بخواهیم k شخص را به طرق مختلف دور یک میز گرد بنشانیم، این کار به $(k-1)!$ روش امکان پذیر است.

تست: شش نفر به چند طریق می توانند دور یک میز گرد بنشینند؟ (ارشد ۹۰)

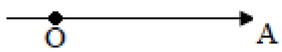
الف) 6 ب) 60 ج) 120 د) 12

حل: گزینه ج صحیح است.

$$(k-1)!=5!=5\times 4\times 3\times 2\times 1=120\ .$$

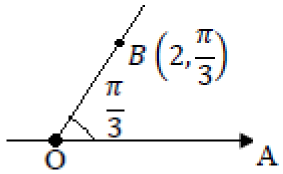
دستگاه مختصات قطبی

دستگاه مختصات قطبی از یک محور و یک نقطه (قطب) روی این محور تشکیل شده است.



مختصات یک نقطه B در دستگاه مختصات قطبی به صورت (r,θ) است که r فاصله جهتدار قطب O از B و θ زاویه جهتدار (در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت) OA تا OB است.

مثال : برای تعیین مکان نقطه $B\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$ ابتدا نیم خطی از O به اندازه زاویه $\frac{\pi}{3}$ رسم می کنیم و سپس روی این نیم خط نقطه ای به فاصله 2 از O را مشخص می کنیم.



نکته : در دستگاه مختصات قطبی نقاط $\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$ ، $\left(-2,\pi+\frac{\pi}{3}\right)$ ، $\left(2,2\pi+\frac{\pi}{3}\right)$ و ... و به طور کلی $\left(2\times(-1)^k,k\pi+\frac{\pi}{3}\right)$ به ازای $k=0,1,2,\dots$ مختصات یک نقطه را نشان می دهند. لذا در دستگاه مختصات قطبی مختصات یک نقطه منحصر به فرد نیست. اما می توان با محدود کردن r و θ به صورت $r>0$ و $0\le\theta<2\pi$ مختصات نقطه را منحصر به فرد کرد.

رابطه بین مختصات دکارتی و قطبی

بین مختصات قطبی (r,θ) و مختصات دکارتی (x,y) روابط زیر برقرار است:

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases},$$

$$x^2+y^2=r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=r^2\left(\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{=1}\right)=r^2 .$$

مثال : مختصات دکارتی نقاط $A\left(5,\frac{\pi}{6}\right)$ ، $B\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ و $C\left(2,\frac{8\pi}{3}\right)$ را به دست آورید.

$$A\left(5,\frac{\pi}{4}\right):\begin{cases} x=5\cos(\pi/6)=\frac{5\sqrt{3}}{2} \\ y=5\sin(\pi/6)=\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$B\left(-1,\frac{\pi}{2}\right):\begin{cases} x=-1\cos(\pi/2)=-1\times 0=0 \\ y=-1\sin(\pi/2)=-1\times 1=-1 \end{cases}$$

$$C\left(2,\frac{8\pi}{3}\right):\begin{cases} x=2\cos(8\pi/3)\overset{(1)}{=}2\cos(2\pi/3)\overset{(2)}{=}2\cos(\pi-\pi/3) \\ y=2\sin(8\pi/3)\overset{(1)}{=}2\sin(2\pi/3)\overset{(2)}{=}2\sin(\pi/3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overset{(3)}{=}-2\cos(\pi/3)=-2\times\frac{1}{2}=-1 \\ \overset{(3)}{=}2\sin(\pi/3)=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3} \end{cases}$$

نکته : (۱) چون توابع $\sin\theta$ و $\cos\theta$ متناوب اند اگر کمان تابع بین 0 تا 2π نباشد مضارب 2π را به کمان اضافه یا از کمان کم می کنیم تا کمان تابع مثلثاتی بین 0 تا 2π قرار گیرد.

$$\cos(8\pi/3)=\cos(6\pi/3+2\pi/3)=\cos(2\pi+2\pi/3)=\cos(2\pi/3) .$$

(۲) اگر کمان یک رابطه مثلثاتی بین $\pi/2$ تا π باشد آن را به صورت $(\pi-a)$ می نویسیم.

(۳) داریم $\sin(\pi - a) = \sin a$ و $\cos(\pi - a) = -\cos a$.

مثال : مختصات قطبی نقاط $A(0,2)$ و $B(-1,1)$ را با شرط $r > 0$ و $0 \le \theta < 2\pi$ تعیین کنید.

$$A(0,2)\,:\; r^2 = x^2 + y^2 = (0)^2 + (2)^2 = 4 \;\Rightarrow\; r = \pm\sqrt{4} \overset{r>0}{\Longrightarrow}\; r = 2\,.$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 2\cos\theta \\ 2 = 2\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \sin\theta = 1 \end{cases} \Rightarrow\; \theta = \frac{\pi}{2}.$$

$$B(-1,1)\,:\; r^2 = x^2 + y^2 = (-1)^2 + (1)^2 = 2 \;\Rightarrow\; r = \pm\sqrt{2} \overset{r>0}{\Longrightarrow}\; r = \sqrt{2}\,.$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 = \sqrt{2}\cos\theta \\ \;\;1 = \sqrt{2}\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow\; \theta = \frac{3\pi}{4}.$$

زیرا در ربع دوم سینوس مثبت و کسینوس منفی است.

تست: مختصات قطبی نقطه ای به طول ۱ و عرض ۱ عبارت است از: (ارشد ۹۰)

الف) $r = \sqrt{2}\;,\;\; \theta = \frac{\pi}{4}$ ب) $r = \sqrt{2}\;,\;\; \theta = -\frac{\pi}{4}$

ج) $r = -\sqrt{2}\;,\;\; \theta = \frac{\pi}{4}$ د) $r = -\sqrt{2}\;,\;\; \theta = -\frac{\pi}{4}$

حل: گزینه الف صحیح است.

$$A(1,1)\,:\; r^2 = x^2 + y^2 = (1)^2 + (1)^2 = 2 \;\Rightarrow\; r = \pm\sqrt{2} \overset{r>0}{\Longrightarrow}\; r = \sqrt{2}\,.$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \sqrt{2}\cos\theta \\ 1 = \sqrt{2}\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow\; \theta = \frac{\pi}{4}.$$

زیرا در ربع اول سینوس و کسینوس مثبت هستند.

معادله قطبی

هر معادله به صورت $r = f(\theta)$ را یک معادله قطبی می نامند. برای تبدیل معادلات قطبی به صورت دکارتی و برعکس از روابط زیر استفاده می کنیم:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \;,\quad r^2 = x^2 + y^2\,.$$

مثال : معادله دکارتی متناظر با معادلات قطبی زیر را به دست آورید.

الف) $r^2 = 2\sin 2\theta \;\;:\;\; x^2 + y^2 = 4\sin\theta\cos\theta = 4\left(\frac{y}{r}\right)\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{4xy}{r^2}$

$$\Rightarrow\; (x^2 + y^2)^2 = 4xy\,.$$

ب) $r = \dfrac{6}{2 - 3\sin\theta} \;\;:\;\; r(2 - 3\sin\theta) = 6 \;\;\Rightarrow\;\; 2r - 3r\sin\theta = 6$

$$\Rightarrow\; 2r = 6 + 3r\sin\theta \;\Rightarrow\; r = 3 + \tfrac{3}{2}r\sin\theta \;\Rightarrow\; r^2 = \left(3 + \tfrac{3}{2}r\sin\theta\right)^2$$

$$\Rightarrow\; x^2 + y^2 = \left(3 + \tfrac{3}{2}y\right)^2.$$

مثال : معادله قطبی متناظر با معادلات دکارتی زیر را به دست آورید.

الف) $x^2 + y^2 = 4x \ : \quad r^2 = 4r\cos\theta \implies r^2 - 4r\cos\theta = 0$

$$\implies r(r - 4\cos\theta) = 0 \implies \begin{cases} r = 0 \\ r = 4\cos\theta \end{cases}$$

ب) $3y - 7x = 0 \ : \quad 3r\sin\theta - 7r\cos\theta = 0$.

فصل سوم: تابع

مقدمه

تابع یکی از مهمترین مفاهیم در ریاضیات می باشد. این مفهوم نه تنها در ریاضیات بلکه در سایر علوم که با ریاضیات درگیر است، نقشی اساسی دارد. معمولا مقادیر یک کمیت متغیر به مقادیر کمیت متغیری دیگر وابسته است. به عنوان مثال محیط یک دایره به اندازه شعاع آن وابسته است، لذا با تعریف تابع می توان رابطه میان دو متغیر را بیان کرد.

تعاریف اولیه

رابطه:مجموعه ای از زوجهای مرتب اعداد را یک رابطه می نامیم. به عنوان مثال:

$$R = \{(1,1),(2,4),(5,25)\}$$

R رابطه ای است که هر عدد را به توان دو می رساند.

تابع:الف) به مجموعه ای از زوج های مرتب اعداد به صورت(x,y) که در بین آنها هر دو زوج مرتبی که مؤلفه اول آنها با هم برابر باشد، با هم برابر باشند را تابع نامند. مجموعه تمام مقادیر x را دامنه **تابع** و مجموعه تمام مقادیر ممکن yرا برد تابع نامند. دامنه را با D و برد را با R نشان می دهیم.

ب) هر رابطه به صورت $f: A \to B$ که به هر عضو x از A حداکثر یک عضو مانند $y = f(x)$ از B متناظر کند را یک **تابع** می نامند.

مثال: اگر تابع f به صورت مجموعه زیر باشد، آنگاه مقادیر s و t را تعیین کنید.

$$f = \{(5,8),(6,t),(6,-1),(s,8)\}$$

چون مؤلفه اول زوج های$(6,t)$ و $(6,-1)$ برابر است برای تابع بودن باید مؤلفه دوم آنها نیز برابر باشد. لذا $t = -1$. اما در تعریف تابع هیچ شرطی برای مؤلفه اول در حالتی که مؤلفه دوم دو زوج برابر باشند بیان نشده است. لذا s هر عددی می تواند باشد. بنابراین $s \in R$.

مثال: آیا ضابطه $y = x^2 - 1$ معرف یک تابع است؟

طبق تعریف یک ضابطه در صورتی تابع است که به هر x از دامنه تنها یک عضو از برد متناظر شود، لذا فرض می کنیم دو عضو دامنه مانند x_1 و x_2 با هم مساوی باشند. اگر دو عضو متناظر با x_1 و x_2از برد نیز با هم مساوی باشند، ضابطه مورد نظر یک تابع است. در غیر اینصورت ضابطه معرف یک تابع نیست. به عبارت دیگر برای تابع بودن باید شرط زیر برقرار باشد:

$$x_1 = x_2 \quad \Longrightarrow \quad y_1 = y_2 .$$

لذا برای این مثال قرار می دهیم:

$$x_1 = x_2 \overset{\text{طرفین به توان دو}}{\Longrightarrow} x_1^2 = x_2^2 \overset{\text{طرفین منهای یک}}{\Longrightarrow} x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1 \Longrightarrow y_1 = y_2 .$$

لذا این ضابطه یک تابع است.

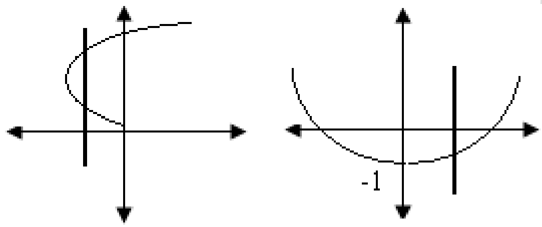
مثال: آیا ضابطه $y^2 = x - 1$ معرف یک تابع است؟

قرار می دهیم:

$$x_1 = x_2 \overset{\text{طرفین منهای یک}}{\Longrightarrow} x_1 - 1 = x_2 - 1 \Longrightarrow y_1^2 = y_2^2 \Longrightarrow y_1 = \pm y_2 .$$

لذا این ضابطه معرف یک تابع نیست.

تشخیص تابع از روی نمودار: اگر بتوان خطی موازی محور y ها طوری رسم کرد که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند، نمودار معرف یک تابع نیست. در غیر اینصورت تابع است. در شکل زیر نمودار سمت راست متعلق به یک تابع است اما نمودار سمت چپ تابع نیست.



تست: کمترین مقدار تابع $y = x^3 + 2x + \frac{3}{2}$ در فاصله $[0, 1]$ کدام است؟ (ارشد ۹۶)

الف) 2 ب) 3 ج) 4 د) $\frac{3}{2}$

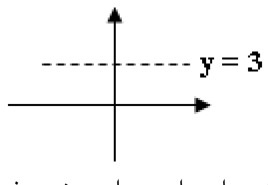
حل: گزینه د صحیح است.

چون تمام جملات مثبت اند، لذا کمترین مقدار وقتی به دست می آید که مقدار متغیر x صفر باشد و $y(0) = \frac{3}{2}$.

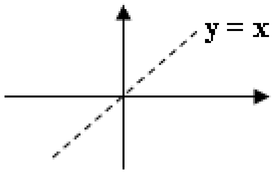
معرفی توابع خاص

در این بخش به معرفی برخی از توابع می پردازیم:

تابع ثابت: تابع $f(x) = c$ که به ازای هر x از دامنه خروجی y برآن عدد ثابت c است را یک تابع ثابتمی نامند. نمودار توابع ثابت به صورت یک خط موازی محور x ها می‌باشد که فاصله آن از محور xها به اندازه c است. مثلاً نمودار تابع ثابت $y = 3$ به صورت زیر است:



تابع همانی: تابع $f(x) = x$ که هر عضو از دامنه را به خودش تصویر می‌کند یک تابع همانینامند. نمودار این تابع نیمساز ربع‌های اول و سوم می‌باشد.



تابع چند جمله ای : هر تابع به صورت $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ که در آن a_i ها اعـدادی ثابت و $n \in N$ می باشد را یک تابع چند جمله ای درجه n مینامند. هر چندجمله ای درجه اول را یک تابع خطی می نامند. تابع ثابت و تابع همانی نمونه هایی از توابع چند جمله ای می باشند.

مثال : تابع $f(x) = 4x + 6$ یک تابع خطی، تـابع $f(x) = x^5 - 3x^4 + 6x^3 - x^2 - 1$ یـک چند جمله ای درجه پنج و تابع $f(x) = x^9 + 15$ یک چند جمله ای درجه نه می باشند.

توابع چند ضابطه ای : هرگاه دامنه تابع به صورت اجتماع چند مجموعه جدا از هم باشد که به ازای هر مجموعه یک ضابطه تعریف شده باشد، تابع را چند ضابطه ایمی نامند.

مثال: الف) تابع واحد به صورت زیر که با $u(x)$ نشان داده می شود تابعی دو ضابطه ای است.

$$u(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

ب) تابع علامت که با $sgn(x)$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می شود، تابعی سه ضابطه ای است.

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

مثال: برد تابع $f(x) = sgn(x) + x^2.u(x)$ را بیابید؟

حل: داریم:

$$sgn(x) + x^2.u(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} + x^2 \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

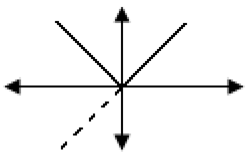
$$= \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} + \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} + \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ x^2 = 0 & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 + x^2 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}.$$

تابع قدر مطلق: تابع با ضابطه $f(x) = |x|$ تابعی است همیشه مثبت و بـه صـورت زیـر تعریـف مـی شود:

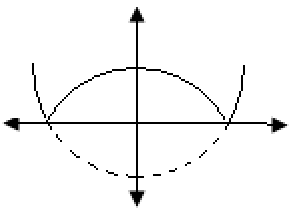
$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



برای رسم نمودار $f(x) = |x|$ ابتدا $f(x) = x$ را رسم می کنیم و سپس قسمتی از نمودار که در پایین محور x ها قرار دارد را به بالای محور x ها تصویر می کنیم. به طور کلی برای رسم نمودار تابعی به صورت$f(x) = |g(x)|$ ابتدا تابع $f(x) = g(x)$ را رسم می کنیم و سپس قسمتی از نمودار که در پایین محور x ها قرار دارد را به بالای محور x ها تصویر می کنیم.

مثال : تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را رسم کنید:

بنا به توضیحات بالا ابتدا تابع $f(x) = x^2 - 1$ را رسم می کنیم و سپس قسمتی از نمودار که در پایین محور x ها قرار دارد (یعنی $x^2 - 1 < 0$) را به بالای محور x ها تصویر می کنیم:



در واقع تابعی که رسم کرده ایم به صورت زیر است:

$$f(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & x^2 - 1 \geq 0 \\ -(x^2 - 1) & x^2 - 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 1 , x \leq -1 \\ 1 - x^2 & -1 < x < 1 \end{cases}$$

تست: $|x - 1| + |2x + 5| = 5$ دارای چند ریشه می باشد؟ (ارشد ۹۶)

الف) ریشه ندارد. ب) چهار ریشه ج) دو ریشه د) سه ریشه

حل: گزینه ج صحیح است.

$x - 1 + 2x + 5 = 5 \implies x = 1/3$ ریشه نیست

$1 - x + 2x + 5 = 5 \implies x = -1$ ریشه است

$x - 1 - 2x - 5 = 5 \implies x = -11$ ریشه نیست

$1 - x - 2x - 5 = 5 \implies x = -3$ ریشه است

تابع جزء صحیح: بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی عدد حقیقی x را جزء صحیحx می نامند و با نماد $f(x) = [x]$ نشان می‌دهند.

$$f(x) = [x] = n \iff \begin{cases} n \leq x < n + 1 \\ n \in Z \end{cases}.$$

مثال : مقدار $[3.01]$ ، $[3.99]$ ، $[3]$ ، $[\sqrt{10}]$، $[-3]$ ، $[-3.01]$و $[-\sqrt{10}]$ را به دست آورید.

$$\begin{aligned}
3 \leq 3.01 < 4 \quad &\rightarrow \quad [3.01] = 3 \\
3 \leq 3.99 < 4 \quad &\rightarrow \quad [3.99] = 3 \\
3 \leq 3 < 4 \quad &\rightarrow \quad [3] = 3 \\
3 \leq \sqrt{10} < 4 \quad &\rightarrow \quad [\sqrt{10}] = 3 \\
-3 \leq -3 < -2 \quad &\rightarrow \quad [-3] = -3 \\
-4 \leq -3.01 < -3 \quad &\rightarrow \quad [-3.01] = -4 \\
-4 \leq -\sqrt{10} < -3 \quad &\rightarrow \quad [-\sqrt{10}] = -4
\end{aligned}$$

تست: مقدار $\left[-\frac{8}{3}\right]$ کدام است؟ (ارشد ۹۱)

الف) -3 ب) -2 ج) 3 د) 2

حل: گزینه الف صحیح است.

$$-\frac{9}{3} \le -\frac{8}{3} < -\frac{6}{3} \quad \rightarrow \quad \left[-\frac{8}{3}\right] = -3$$

تست: مقدار تابع $f(x) = [x] - [1 - x]$ در نقطه $x = \frac{1}{3}$ عبارت است از: (ارشد ۹۰)

الف) صفر   ب) 1 ج) -1 د) $-\frac{1}{3}$

حل: گزینه الف صحیح است.

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left[\frac{1}{3}\right] - \left[1 - \frac{1}{3}\right] = \left[\frac{1}{3}\right] - \left[\frac{2}{3}\right] = 0 - 0 = 0\,.$$

تست: اگر $[x] = 3$ باشد، $\left[\frac{1}{x}\right]$ عبارت است از: (ارشد ۹۴)

الف) 2 ب) -1 ج) 1 د) صفر

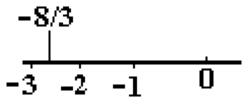
حل: گزینه د صحیح است.

$$[x] = 3 \;\Longrightarrow\; 3 \le x < 4 \;\Longrightarrow\; \frac{1}{4} < \frac{1}{x} \le \frac{1}{3} \;\Longrightarrow\; \left[\frac{1}{x}\right] = 0\,.$$

تست: مقدار $\left[-\frac{8}{3}\right]$ کدام است؟ (ارشد ۹۶)

الف) -3 ب) -2 ج) 3 د) 2

حل: گزینه الف صحیح است.



اولین عدد صحیح سمت چپ -3 است.

ویژگیهای تابع جزء صحیح:

ویژگیهای زیر برای تابع جزء صحیح برقرار است:

1) $[x] \le x < x + 1$ 2) $0 \le x - [x] < 1$

3) $x - 1 < [x] \le x$ 4) $[x + n] = [x] + n \;;\; n \in Z$

تست: اگر $[x + 1] = 4$ آنگاه $[1 - x]$ عبارت است از: (ارشد ۹۴)

الف) 3 ب) -3 ج) -2 د) 2

حل: گزینه های ب و ج صحیح می باشند.

$$[x + 1] = [x] + 1 = 4 \;\Longrightarrow\; [x] = 3 \;\Longrightarrow\; 3 \le x < 4 \;\Longrightarrow\; -4 < -x \le -3$$

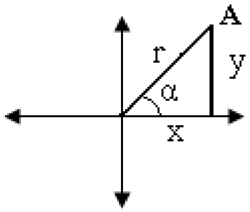
$$\Longrightarrow \begin{cases} [-x] = -4 & x \text{ غیرصحیح} \\ [-x] = -3 & x \text{ صحیح} \end{cases} \;\Longrightarrow\; \begin{cases} [-x] + 1 = -3 & x \text{ غیرصحیح} \\ [-x] + 1 = -2 & x \text{ صحیح} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [1-x]=-3 & x \text{ غیرصحیح} \\ [1-x]=-2 & x \text{ صحیح} \end{cases}$$

توابع مثلثاتی : اگر $A=(x\,,y)$ نقطه ای در صفحه مختصات به فاصله r از مبدأمختصات باشد بطوریکه خط oA با جهت مثبت محور xها زاویه α بسازد آنگاه:

$$\sin\alpha=\frac{y}{r} \quad ,\cos\alpha=\frac{x}{r} \quad , \quad \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{y}{x}$$

$$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{x}{y} \quad , \quad \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{r}{x} \quad , \quad \csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{r}{y}$$



روابط مهم مثلثاتی: در این قسمتتعدادی از روابطمهم مثلثاتی را بیان می کنیم:

الف)

1) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 2) $\tan\alpha.\cot\alpha=1$

3) $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha$ 4) $1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}=\csc^2\alpha$

ب) روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه β,α :

1) $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha.\cos\beta\pm\cos\alpha.\sin\beta$

2) $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha.\cos\beta\mp\sin\alpha.\sin\beta$

3) $\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha.\tan\beta}$

4) $\cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\cot\alpha.\cot\beta\mp1}{\cot\alpha\pm\cot\beta}$

پ) روابط مثلثاتی زاویه 2α :

1) $\sin2\alpha=2\sin\alpha.\cos\alpha$ 2) $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

3) $\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ 4) $\cot2\alpha=\frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}$

ت) روابط مثلثاتی تبدیل جمع به ضرب و بر عکس:

1) $\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}.\cos\frac{\alpha\pm\beta}{2}$

2) $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

3) $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$$4)\quad \sin\alpha.\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$5)\quad \cos\alpha.\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$6)\quad \sin\alpha.\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

نکته: به ازای هر α همواره داریم $-1\le\sin\alpha\le+1$ و $-1\le\cos\alpha\le1$.

مثال: اگر $x\in[\pi,2\pi]$ باشد آنگاه حاصل عبارت زیر را را بیابید؟

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt{1-\cos 2x}}$$

می دانیم $1-\cos 2x=2\sin^2 x$، پس:

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt{1-\cos 2x}}=\frac{2}{\sqrt{2\sin^2 x}}=\frac{2}{\sqrt{2}.|\sin x|}=\frac{\sqrt{2}}{|\sin x|}$$

حال چون در بازه $[\pi,2\pi]$ مقدار $\sin x$ منفی است لذا:

$$|\sin x|=-\sin x\Rightarrow f(x)=\frac{\sqrt{2}}{-\sin x}=-\sqrt{2}.\csc x\,.$$