مقدمه

در فصل گذشته مفاهیم اساسی احتمالات و روشهای حساب احتمالات پیشامدهای آماری را معرفی کردیم. در فصل حاضر برآنیم تا بر بنیان این مفاهیم بنایی بر پا داریم و راههای محاسبهٔ احتمالات پیشامدهای آماری را تحت شرایط پیچیده‌تر پیدا کنیم.

توزیع احتمال متغیرهای منفصل(گسسته):

توزیع احتمالات هر متغیر تصادفی منفصل عبارت از جدول، نمودار، دستور ریاضی یا وسیلهٔ دیگری است که همه مقادیر متغیر تصادفی منفصل را به همراه احتمالات مربوطه مشخص می‌کند.

می‌توان دو خاصیت اساسی توزیع احتمال متغیرهای منفصل را به‌صورت زیر ارائه داد:

۱) $0 \leq P(X = x) \leq 1$

۲) $\sum P(X = x) = 1$

توزیع برنولی:

در آمار کاربردی، توزیع دو جمله‌ای یکی از مستعمل‌ترین توزیعهای آماری به شمار می‌آید، توزیع دو جمله‌ای از فرایندی معروف به آزمایش برنولی(Bernoulli) استخراج می‌گردد. هرگاه آزمایش و یا فرایندی بتواند تنها یکی از دو پیشامد یا نتیجه مانعه‌الجمع همچون، مرگ و زندگی، بیماری و سلامتی و مرد و زن را نتیجه دهد فرایند مزبور را آزمایش برنولی گویند. مجموعه‌ای از آزمایشهای برنولی در شرایط زیر فرایند برنولی را شکل می‌دهد.

۱- هر یک از آزمایشهای تنها به‌صورت یکی از دو نتیجه مانعه‌الجمع ممکن باشد. یکی از آنها را به اختیار موفقیت(پیروزی) و دیگری را عدم موفقیت(شکست) می‌نامند.
۲- احتمال موفقیت را به p نمایش داده و در هر آزمایش از مقدار ثابتی برخوردار است، احتمال عدم موفقیت، 1-p را با q نمایش می‌دهند.
۳- آزمایشهای متعدد از یکدیگر مستقل هستند، بدین معنی که نتیجهٔ یکی از آزمایشهای بخصوص در نتیجه آزمایش دیگر اثری ندارد.

تعریف احتمال دو جمله‌ای

توزیع دو جمله‌ای یکی از مهمترین توزیع‌های صفات گسسته است که کاربرد عملی فراوان دارد.

ضمنا این توزیع دارای صورتهای حدی بسیار جالبی است که هر یک بنوبه خود حائز اهمیت می‌باشند. این توزیع مربوط به تکرار آزمایش است زمانی استفاده می‌شود که وقتی احتمال موفقیت در هر بار آزمایش مقدار ثابتی باشد و در تکرار آزمایش مقدار آن تغییر نکند(روشهای آماری، دکتر کاظم محمد و همکاران)

احتمال اینکه در n آزمایش دقیقا x موفقیت حاصل شود از دستور کلی ریاضی زیر قابل محاسبه خواهد بود:

$$P(X=x)=f(x)= C_n^x P^x q^{n-x} \qquad ; X=0, 1, 2, \dots , n$$

در این رابطه C_n^x عبارت است از ترکیب x عنصری از n عنصر و جدول I د ر پیوست مقادیر C_n^x ر ا مستقیما در اختیار می‌گذارد.

$$C_n^x = \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

با طرح یک مثال کاربرد توزیع دو جمله‌ای را بیان می‌داریم. فرض کنید ۳۰ درصد از جمعیت معینی نسبت به بیماری خاصی مصونیت داشته باشند. اگر نمونهٔ تصادفی ۱۰ تایی از این جمعیت انتخاب شود، احتمال آنکه دقیقا شامل چهار شخص مصون از بیماری باشد چیست؟ احتمال مصونیت از بیماری ۰/۳ در نظر گرفته‌شده است. با استفاده از معادله بالا خواهیم داشت:

$$f(4)=\binom{10}{4}(.7)^6(.3)^4$$

$$=\frac{10!}{4!6!}(.1176)(.0081)$$

$$=.20$$

توزیع دو جمله‌ای دقیقا در موقعیتهائی که نمونه گیری از جمعیت غیر محدود یا جمعیت محدود باجایگزینی صورت گرفته باشد کاربرد دارد. عقیدهٔ کلی بر این است که هرگاه n نسبت به N کوچک باشد استفاده از توزیع دو جمله‌ای مناسب خواهد بود. برخی از آماردانان اظهار عقیده کرده‌اند که منظور از عبارت n نسبت N کوچک باشد این است که مقدار N حداقل ده برابر بزرگتر از n باشد.

مثال: مشاهدات قبلی نشان‌داده است که احتمال مرگ در یک عمل جراحی معینی برابر ۰/۱ است مطلوب است احتمال اینکه در ۵ مورد از این عمل، تعداد مرگ ۲ مورد باشد.(روشهای آماری، دکتر کاظم محمد و همکاران)

چون احتمال مرگ در هر یک از این ۵ عمل جراحی ثابت و برابر ۰/۱ فرض شده است، بنابراین اگر پیشامد A وقوع مرگ در هر آزمایش باشد احتمال آن P=0/1 و احتمال عکس آن یعنی بهبود برابر q=1-0/1=0/9 است. با توجه به شرایط مساله که n=5 و x=2 است خواهیم داشت:

$$f(2)=\binom{5}{2}(0/1)^2(0/9)^3=\frac{5!}{2!3!}(0/1)^2(0/9)^3=0/0729$$

سوال: با فرض برابری احتمال تولد فرزندان دختر و پسر، تعداد نوزادان پسر در بین ۱۶ نوزادی که در یک شبانه روز در یک شهر به دنیا آمده‌اند دارای کدام توزیع است؟(دکترای ۸۷)

۱)توزیع دو جمله‌ای با میانگین ۰/۵ ۲)توزیع دو جمله‌ای با انحراف معیار ۲

۳)توزیع پواسن با میانگین ۸ ۴)توزیع پواسن با انحراف معیار ۲

پاسخ گزینه ۲ /

$\mu = np = 16 \times \frac{1}{2} = 8$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{16 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

سوال: در یک شهر ۸۰ درصد کودکان در مقابل بیماری خاصی مصون می‌باشند، احتمال اینکه در یک نمونه تصادفی ۳ تائی فقط یک کودک مصون باشد برابر است با:(دکترای ۸۷)

۱)۲/۴(۰/۰۴) ۲)۱/۶(۰/۰۴) ۳)(۰/۸)(۰/۲) ۴)(۰/۶۴)(۰/۲)

پاسخ گزینه ۱ /

P=0/8 n=3 x=1

$P(x=1)=\binom{3}{1}(0/8)^1(0/2)^2=3\times0/8\times0/04=2/4(0/04)$

سوال: در کدامیک از توزیع‌های زیر، واریانس همواره از میانگین کوچکتر است؟(دکترای ۸۷)

۱)دو جمله‌ای ۲)پواسن ۳)نرمال ۴)کای-دو

پاسخ گزینه ۱ / در توزیع دوجمله‌ای همیشه واریانس از میانگین کوچکتر است.

سوال: در یک کارخانه بزرگی ۸۰ درصد کارگران از کلاه ایمنی استفاده می‌کنند. اگر سه کارگر به طور تصادفی انتخاب شوند، احتمال اینکه هیچ کدام از کلاه ایمنی استفاده نکنند چقدر است؟(ارشد ۸۵)

۱)۰/۵۱۲ ۲)۰/۰۰۸ ۳)۰/۶ ۴)۰/۰۲۴

پاسخ گزینه ۲ /

$\binom{3}{0}(0/8)^0(0/2)^3=0/008$

سوال: نصف مردم یک شهر از نوعی بیمه‌ی درمانی برخوردار هستند اگر ۴۰۰ نفر به طور تصادفی انتخاب شوند، انحراف معیار تعداد بیمه‌شدگان چه عددی است؟(ارشد ۸۵)

۱) ۰/۲۵ ‌‌ ۲) ۰/۵ ‌‌ ۳) ۱۰ ‌‌ ۴) ۱۰۰

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{400 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = 10$

سوال: اگر ده درصد از بیماران نسبت به یک نوع دارویی بی‌حسی حساسیت داشته باشند، احتمال آنکه از میان ۴ بیمار که دارو برای آنها تجویز شده است هیچ بیماری حساسیت نشان ندهد چقدر است؟(ارشد ۸۳)

۱) $(0/1)^4$ ‌‌ ۲) $(0/9)^4$ ‌‌ ۳) $1-(0/1)^4$ ‌‌ ۴) $1-(0/9)^4$

پاسخ گزینه ۲ /

$\binom{4}{0}(0/1)^0(0/9)^4=(0/9)^4$

سوال:مدارک نشان می‌دهد در یک منطقه از هر ده نفر یک نفر دچار بیماری تیروئید ضعیف است. اگر ۲۰ نفر را در این شهر به تصادف انتخاب کنیم احتمال اینکه حداقل یکی از آنها به بیماری تیروئیدی ضعیف مبتلا باشد چقدر است؟(ارشد ۸۲)

۱) $(0/1)^{20}$ ‌‌ ۲) $1-(0/1)^{20}$ ‌‌ ۳) $1-(0/9)^{20}$ ‌‌ ۴) ۰/۱

پاسخ گزینه ۳ /

$1-\binom{20}{0}(0/1)^0(0/9)^{20}=1-(0/9)^{20}$

سوال: فرض کنید که تعداد موالید در تمام ماه‌های سال یکسان باشد. اگر سه نفر را به طور تصادفی انتخاب کنیم، احتمال اینکه هر ۳ نفر آنها دارای ماه تولد یکسان باشند، چقدر است؟(ارشد ۸۲)

۱) $\frac{3}{144}$ ‌‌ ۲) $\frac{1}{144}$ ‌‌ ۳) $\frac{1}{1728}$ ‌‌ ۴) $\frac{3}{1728}$

پاسخ گزینه ۳ /

$\binom{3}{3}\left(\frac{1}{12}\right)^3\left(\frac{11}{12}\right)^{3-3}=\frac{1}{1728}$

سوال: احتمال اینکه از ۴ نوزاد که به طور تصادفی انتخاب می‌شوند اقلا یک نفر دارای وزنی کمتر از میانه باشد برابر است با:(ارشد۸۱)

۱) $\frac{7}{8}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{15}{16}$ ۴) $\frac{1}{16}$

پاسخ گزینه ۳ /

$1-\binom{4}{0}\ (\frac{1}{2})^0(\frac{1}{2})^4 = 1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$

سوال: احتمال موفقیت در یک عمل جراحی ۸۰ درصد است. احتمال اینکه از ۳ مورد عمل فقط یک موفقیت داشته باشیم برابر است با:(ارشد ۸۱)

۱) ۰/۰۹۶ ۲) ۰/۳۸۴ ۳) ۰/۰۳۲ ۴) ۰/۱۲۸

پاسخ گزینه ۱ /

$\binom{3}{1}(0/8)^1(0/2)^2=3\times0/8\times0/04=0/096$

سوال- در یک چهار راه مدت زمان چراغ سبز ۱۵ ثانیه، چراغ زرد ۱۰ ثانیه و چراغ قرمز ۲۵ ثانیه است. راننده ای ۱۰ بار در روز از این چهار راه عبور می کند. احتمال این که درست دو بار در روز به چراغ قرمز برخورد کند چقدر است؟(ارشد ۹۹)

الف) $45 \times (\frac{1}{2})^{10}$ ب) $90 \times (\frac{1}{2})^{10}$

ج) $45 \times (\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^8$ د) $90 \times (\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^8$

پاسخ گزینه ۱/ احتمال برخورد با چراغ قرمز

$$\frac{25}{25+10+15}=\frac{1}{2}$$

$$(\frac{10}{2})(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^8 = 45 \times (\frac{1}{2})^{10}$$

سوال- در توزیعی دو جمله ای میانگین برابر ۱۰ و انحراف معیار برابر ۳ می باشد. تعداد آزمایش ها کدام است؟(ارشد ۹۸)

الف) ۱۰۰ ب) ۹۰ ج) ۶۰ د) ۳۰

پاسخ گزینه ۱/

$\mu = np = 10$

$\sigma = \sqrt{npq} = 3$

10q=9 , q=0/9 , p=0/1 , n(0/1)=10

N=100

سوال- یک واکسن برای جلوگیری از یک بیماری با احتمال ۰/۹ تاثیر مثبت دارد. این واکسن را برای ۵ نفر استفاده کرده ایم. احتمال آنکه در ۳ نفر تاثیر مثبت داشته باشد چقدر است؟(ارشد ۹۸)

الف) $0/1\ (0/9)^3$ ب) $0/01\ (0/9)^3$ ج) $(0/9)^3$ د) $2(0/9)^3$

پاسخ گزینه ۱/

$$\binom{5}{3}(0/9)^3(0/1)^2 = 10(0/9)^3\,(0/1)^2 = 0/1(0/9)^3$$

سوال- احتمال تشخیص درست یک بیماری ۰/۹۰ است. اگر سه بیمار مورد بررسی قرار گیرند، احتمال اینکه تشخیص حداقل یک بیمار درست باشد چقدر است؟(ارشد ۹۹)

الف) ۰/۰۰۱ ب) ۰/۹۹۹ ج) ۰/۹ د) ۰/۱

پاسخ گزینه ۲/ با استفاده از توزیع دوجمله ای داریم:

$P(x\geq1)=1-p(x\leq0)=1-\binom{3}{0}(0/9)^0(0/1)^3=1-0/001=0/999$

سوال-احتمال اینکه وزن دو نوزاد از سه نوزادی که به تصادف انتخاب شده اند کمتر از میانه وزن نوزادان جامعه باشد، برابر است با: (ارشد ۹۷)

الف)۰/۱۲۵ ب)۰/۳۷۵ ج)۰/۳۳۳ د)۰/۶۶۶

پاسخ گزینه ۲/

$$\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 3 \times \frac{1}{8} = 0/375$$

تعریف آماری احتمال:

با استفاده از فرمول دو جمله‌ای می‌توان نشان داد که با بزرگ‌شدن نامحدود n، احتمال اینکه اختلاف فراوانی نسبی مشاهده شده یعنی $\frac{X}{\mathrm{n}}$ با احتمال حقیقی یعنی p از هر عدد کوچکی کوچکتر باشد، برابر یک خواهد شد. که این یکی از صور بیان قانون اعداد بزرگ است. به این دلیل در مواردی که نتوان بر طبق تعریف و قواعد محاسبه احتمال، مقدار احتمال حادثه را تعیین کرد فراوانی نسبی را در آزمایشات به اندازه کافی بزرگ به عنوان احتمال حادثه قبول می‌کنیم. احتمالی که به این صورت تعیین می‌گردد، تعریف آماری احتمال می‌باشد.(روشهای آماری، دکتر کاظم محمد و همکاران)

توزیع پواسن:

یکی دیگر از توزیع‌های مهم برای صفات گسسته که نسبتا زیاد از آن استفاده می‌شود، توزیع پواسن است. از این توزیع می‌توان در مسائلی از نوع توزیع دو جمله‌ای که در آن n بسیار بزرگ ولی p بسیار کوچک است استفاده نمود. در این حالت گرچه می‌توان احتمال x موفقیت را طبق توزیع دو جمله‌ای محاسبه کرد، ولی این محاسبات طولانی و وقت‌گیر خواهد بود لذا در این حالت می-توان احتمال مورد نظر را از توزیع پواسن بدست آورد.

اگر x تعداد وقوع پیشامدهای تصادفی در یک فاصله‌ی زمانی یا فضایی(حجمی از ماده) باشد، احتمال وقوع x به‌صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\mathrm{f(x)}=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, \qquad \text{برای} \quad x=0, 1, 2, \ldots$$

حرف یونانیλ(لاندا) را پارامتر توزیع گفته و تعداد متوسط وقوع پیشامد تصادفی در فاصله(یاحجم) است. نماد e عدد ثابتی است که تا چهار رقم اعشار برابر 2.7183 می‌باشد. جدول شماره II در پیوست مقادیر $e^{-\lambda}$ را در اختیار می‌گذارد.

- نکته: به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که برای همهٔ مقادیر x، f(x)≥0 بوده و $\sum_x \mathrm{f(x)} = 1$ می‌باشد، به قسمی که توزیع پوآسن همهٔ شرایط توزیع احتمال را دارا است.
- نکته: نمود جالب توزیع پوآسن در این حقیقت نهفته شده است که میانگین و واریانس آن، هردو با هم برابرند.

مثال:

مدیر یکی از بیمارستانها پس از چندین سال مطالعه روی مراجعه روزانه بیماران اضطراری به بخش اتفاقات بیمارستان بدین نتیجه رسیده که آنها بر طبق قانون پوآسن توزیع شده‌اند. پرونده‌های بیماران مراجعه‌کننده نشان می‌دهد که در طول این

مدت بطور متوسط هر روز سه بیمار اضطراری پذیرفته شده‌اند. اگر فرض مدیر بیمارستان در مورد توزیع پوآسن صحیح باشد، احتمالات زیر را بدست آورید:

۱- احتمال آن که دقیقا دو بیمار اضطراری در روز معینی مراجعه‌کرده باشند چیست؟

حل: λ=3 و X متغیر تصادفی است که تعداد مراجعه‌کنندگان اضطراری در روز را نشان می‌دهد. اگر X توزیع پوآسن داشته باشد،

$$P(X=2)=f(2)=\frac{e^{-3}3^2}{2!}$$

۲- احتمال آن که در روز معین هیچ مراجعه‌کننده اضطراری نداشته باشیم چیست؟

حل: $f(0)=\frac{e^{-3}3^0}{0!}$

$$=\frac{.050(1)}{1}$$

$$=.05$$

۳- احتمال آن که سه یا چهار بیمار اضطراری در روز معینی پذیرفته شوند چیست؟

حل: چون این دو پیشامد مانعه‌الجمع هستند، قاعده جمع را برای بدست آوردن احتمال آنها بکار می‌بریم:

$$f(3)+f(4)=\frac{e^{-3}3^3}{3!}+\frac{e^{-3}3^4}{4!}$$

$$=\frac{.05(27)}{3.2.1}+\frac{.05(81)}{4.3.2.1}$$

$$=.225+.16875$$

$$=.39$$

- نکته: در توزیع پواسن $\lambda=np$ می‌باشد که n تعداد نمونه و p مقدار احتمال است.
- نکته: در توزیع پوآسن میانگین و واریانس با هم برابرند و هر دو برابر λ هستند.

سوال- متغیر تصادفی X دارای توزیع پواسن است. اگر P(X=۰)=P(X=۱) باشد، مقدار $E(X^2)$ برابر است با: (ارشد ۹۸)

الف) ۲ ب) ۳

ج) ۴ د) ۵

پاسخ گزینه ۱/ با توجه به تعریف توزیع پواسن و تعریف واریانس متغیر تصادفی خواهیم داشت:

$P(x=0)=p(x=1) \quad , \quad \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!}=\frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!}$

از حل معادله $\lambda = 1$ بدست می آید از طرفی

$\sigma^2 = \lambda = 1 \; , \; E(x)=\lambda=1$

بنابراین:

$\sigma^2 = E(x^2) - E(x) = 1$

$1=E(x^2)-1$

$E(x^2)=2$

سوال: هرگاه احتمال مرگ از یک بیماری سالانه یک در هزار باشد، احتمال آنکه در طول یکسال از ۱۰۰۰ بیمار هیچ بیماری فوت نکند، تقریبا برابر است با:(ارشد ۸۸)

۱) $1-e^{0/001}$ ۲) $1-e^{-1}$ ۳) $e^{0/001}$ ۴) e^{-1}

پاسخ گزینه ۴ /

$P=0/001 \quad n=1000 \quad \lambda = np \quad \lambda=0/001\times1000=1 \qquad f(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad f(x)=\frac{e^{-1}1^0}{0!}=e^{-1}$

سوال: اگر احتمال موفقیت در هر آزمایش برابر $p=0/001$ باشد و این آزمایش را ۲۰۰۰ بار به طور مستقل تکرار کنیم، احتمال آنکه تعداد موفقیت مشاهده شده برابر یک باشد تقریبا برابر است با:(ارشد ۸۸)

۱) $2e^{-2}$ ۲) $\frac{1}{2}e^{-1}$ ۳) $2e^{-1}$ ۴) $\frac{1}{2}e^{-2}$

پاسخ گزینه ۱ /

$n=2000 \quad p=0/001 \qquad \lambda = np = 0/001\times2000=2$

$f(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=\frac{e^{-2}2^1}{1!}=2e^{-2}$

سوال: در کدامیک از توزیع‌های احتمال زیر واریانس و میانگین همواره برابرند؟(ارشد ۸۷)

۱)نرمال ۲)t ۳)کای دو ۴)پوآسن

پاسخ گزینه ۴ /

- **نکته: زمانی که n به اندازه کافی بزرگ و p به اندازه کافی کوچک باشد می‌توان از توزیع پوآسن به عنوان تقریبی از توزیع دو جمله‌ای استفاده کرد در این صورت λ=np**

سوال: در یک آزمایش تکراری با n تکرار که احتمال موفقیت در هر بار آزمایش برابر p است وقتی تعداد موفقیت به سمت توزیع پراسون میل می‌کند که:(دکترای ۸۵)

۱) n و p هر دو به سمت صفر میل کنند.

۲) n به سمت بی نهایت و p به سمت $\frac{1}{2}$ میل می‌کند.

۳) n به سمت بی نهایت و p به سمت صفر میل کند و np محدود باشد.

۴) حاصل ضرب n در p بزرگتر از ۵ باشد.

پاسخ گزینه ۳ /

سوال: تجربه نشان‌داده است که در هر شبانه روز به طور متوسط ۲۴ نفر به اورژانس یک بیمارستان مراجعه می‌کنند در صورتی که شدت مراجعه به ساعت مختلف روز بستگی نداشته باشد چقدر احتمال دارد که در یک ساعت مشخص حداقل یک بیمار به اورژانس مراجعه کند؟(ارشد ۸۵)

۱) e ۲) $\frac{1}{e}$ ۳) ۱-$\frac{1}{e}$ ۴) ۱-e

پاسخ گزینه ۳ / با تناسب می‌توان مقدار λ را برای یک ساعت بدست آورد در نتیجه داریم ساعت متوسط در این تست چون حداقل خواسته شده است بنابراین داریم:

24 ۲۴

λ 1 $\longrightarrow$ $\lambda=\frac{24}{24}=1$

$1-f(x)=1-\frac{e^{-1}1^{1}}{1!}=1-e^{-1}=1-\frac{1}{e}$

سوال- در یک شهر کوچک به طور متوسط ۲۴ نفر در سال فوت می کنند. احتمال این که در یک ماه مشخص فقط یک نفر فوت کند چقدر است؟(ارشد ۹۹)

الف) e^{-2} ب) $2e^{-2}$ ج) e^{-1} د) $2e^{-1}$

پاسخ گزینه ۲/

$$\begin{matrix} 12 & 24 \\ 1 & \lambda \end{matrix} \longrightarrow \lambda = \frac{24}{12} = 2$$

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \frac{e^{-2}2^{1}}{1!} = 2e^{-2}$$

سوال-تعداد مراجعین به اورژانس یک بیمارستان دارای توزیع پواسن با میانگین ۲ نفر در روز است احتمال اینکه در ۴ روز متوالی هیچ بیماری به اورژانس مراجعه نکند برابر است با: (ارشد ۹۷)

الف) $4e^{-2}$ ب) e^{-8} ج) $4(1-e^{-2})$ د) $4e^{-8}$

پاسخ گزینه ۲/

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & \lambda \end{matrix} \rightarrow \lambda = 2 \times 4 = 8$$

سوال: اگر تعداد مراجعین به یک مرکز درمانی دارای توزیع احتمال پواسن با میانگین ۴ نفر در هر ساعت باشد، انحراف معیار تعداد مراجعین به این مرکز در هر ساعت برابر است با:(ارشد ۸۵)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۴ ۴) ۲

پاسخ گزینه ۴ / در توزیع پواسن انحراف معیار برابر است با $\sqrt{\lambda}$

$\boldsymbol{\sqrt{\lambda}=\sqrt{4}=2}$

سوال: تعداد مراجعین به اتفاقات یک بیمارستان از توزیع پوآسن با میانگین ۲ بیمار در روز برخوردار است احتمال آنکه در یک روز هیچ بیماری به اتفاقات بیمارستان مذکور مراجعه نکند برابر است با:(ارشد ۸۲)

۱) e^{-2} ۲) $1-e^{-2}$ ۳) $2e^{-2}$ ۴) $1-2e^{-2}$

پاسخ گزینه ۱ / هیچ بیمار به بیمارستان مراجعه نکند یعنی x=0 می‌باشد. و $\lambda=2$

$$f(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}=\frac{e^{-2}2^{0}}{0!}=e^{-2}$$

سوال: در یک توزیع پواسن با میانگین ۱۶ مقدار انحراف معیار برابر است با:(ارشد ۸۱)

۱۶(۱ ۸(۲ ۴(۳ ۲(۴

پاسخ گزینه ۳ /

انحراف معیار توزیع پواسن=$\sqrt{\lambda}$=$\sqrt{16}$=4

امید ریاضی متغیر تصادفی:

میانگین حسابی یک متغیر تصادفی را اصطلاحا امید ریاضی آن متغیر نیز می‌نامند و برای نشان دادن آن از حرف E استفاده می‌شود در این صورت اگر توزیع متغیر تصادفی توسط جدول زیر بیان شود:

X_i	X_1	X_2	X_3	...	x_n
P_i	P_3	P_2	P_3	...	P_n

امید ریاضی این کمیت که همان میانگین است عبارت خواهد بود از:

$$\mu = E(x)=P_1x_1+ P_2x_2+\ldots+ P_nx_n=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

واریانس متغیر تصادفی می‌تواند به‌صورت زیر محاسبه گردد:(روشهای آماری، دکتر کاظم محمد و همکاران)

$$\sigma^2=E(x_i-\mu)^2 = E(x^2)-(E(x))^2$$

مثال: در انداختن یک تاس، عدد ظاهر شده روی تاس متغیری تصادفی است که مقادیر ۱و۲و۳و۴و۵و۶ را با احتمال $\frac{1}{6}$ به‌صورت زیر اختیار می‌کند:

X_i	۱	۲	۳	۴	۵	۶
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

امید ریاضی و واریانس این متغیر تصادفی را بدست آورید:

$$\mu = E(x) = \frac{1}{6}(1)+\frac{1}{6}(2)+\frac{1}{6}(3)+\frac{1}{6}(4)+\frac{1}{6}(5)+\frac{1}{6}(6)=\frac{7}{2}$$

$$\sigma^2=E(x^2)-(E(x))^2=\frac{91}{6}-(\frac{7}{2})^2=\frac{35}{12}$$

$$E(x^2)=\frac{1}{6}(1)^2+\frac{1}{6}(2)^2+\ldots+\frac{1}{6}(6)^2=\frac{91}{6}$$

سوال: توزیع متغیر تصادفی X به‌صورت زیر است؟(ارشد ۸۹)

X	۱	۲	۳	۴	۵
P(X)	0/1	0/3	0/2	0/3	0/1

امید ریاضی متغیر X یعنی E(X) برابر است با:

۱) ۳/۶ ۲) ۳ ۳) ۲/۶ ۴) ۰/۳

پاسخ گزینه ۲ /

$E(X)=\sum P_i x_i =(0/1\times1+0/3\times2+\ldots+0/1\times5)=3$

سوال: ۲۵ درصد افراد جامعه‌ای دارای یک فرزند، ۴۰ درصد دارای ۲ فرزند و مابقی دارای ۳ فرزند می‌باشند میانگین تعداد فرزندان افراد جامعه چقدر است؟(ارشد ۸۳)

۱) ۲ ۲) ۲/۱ ۳) ۲/۲ ۴) ۲/۳

پاسخ گزینه ۲ / با توجه به تعریف امید ریاضی داریم:

تعداد فرزندان	۱	۲	۳
احتمال	۰/۲۵	۰/۴۰	۰/۳۵

$E(x)= \sum P_i x_i =(1\times0/25+2\times0/40+3\times0/35)=2/1$

توزیع احتمالات متصل(پیوسته):

تاکنون توزیع احتمالات گسسته دو جمله‌ای و پوآسن را ملاحظه کردیم. حال می‌خواهیم توزیع احتمالات متغیرهای تصادفی پیوسته را بررسی کنیم. در فصل اول دربارهٔ متغیر متصل گفتیم که متغیر متصل متغیری است که در هر دامنهٔ مشخص از دو مقدار از آن می‌توان مقادیر ممکن دیگری را تصورکرد. در نتیجه بین هر دو مقدار معین از یک متغیر متصل بینهایت مقدار می‌تواند وجود داشته باشد.

یکی از مهم‌ترین توزیع‌های فراوانی،(برای کمیت پیوسته) توزیع نرمال است. اهمیت این توزیع نه تنها از این نظر است که در طبیعت بسیاری از صفات تقریبا دارای توزیع نرمال می‌باشند، بلکه بسیاری از روشهای آماری که در فصول بعدی این کتاب عرضه

می‌گردد بر اساس این توزیع است و حتی پاسخ بسیاری از مسائل عملی آمار بر پایه فرض نرمال بودن توزیع جامعه، آسان‌تر و یا اصولا امکان‌پذیر می گردد. شکل ظاهری این توزیع زندگی شکل و متقارن است و دامنه تغییرات آن از منهای بی‌نهایت تا بعلاوه بی‌نهایت ادامه دارد و مانند هر منحنی توزیع دیگری، سطح زیر منحنی نرمال بین دو مقدار صفت، معرف فراوانی نسبی و یا به عبارت دیگر، احتمال اینکه متغیر مورد مطالعه در این فاصله قرار گیرد می‌باشد و در نتیجه سطح کل زیر منحنی همواره برابر یک است.(روشهای آماری، دکتر کاظم محمدو همکاران)

تعریف تابع چگالی متغیر تصادفی متصل

تابع f(x) را در توزیع احتمال(تابع چگالی احتمال) متغیر تصادفی متصل x گویند، اگر سطح کل محدود شده آن با منحنی و محور xها برابر با یک باشد، و هر سطح کوچکتر زیر منحنی که بوسیلهٔ آن منحنی، محورx ها و عمودهای رسم شده در نقاط a و b بر محور xها محصور شود، احتمال x مابین نقاط a و b را ارائه دهد.

توزیع طبیعی(نرمال):

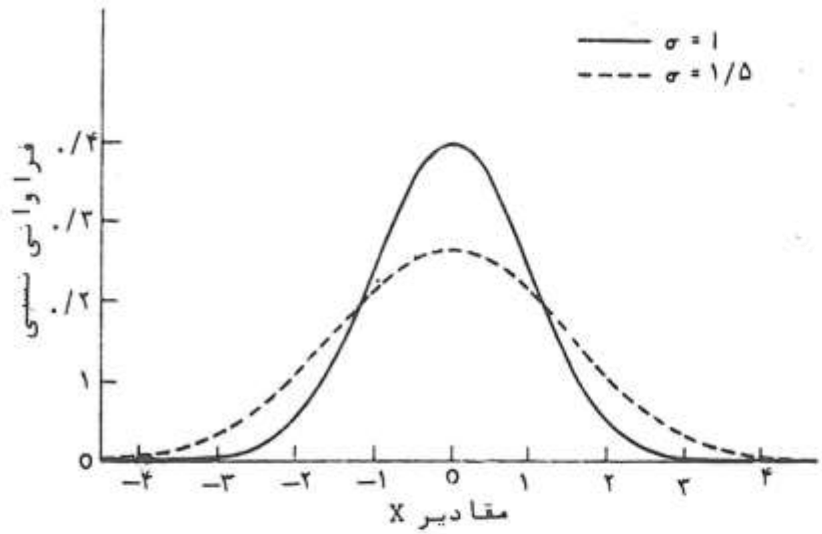
اکنون پیرامون توزیع نرمال، که مهمترین توزیع در علم آمار بشمار می‌آید، بحث خود را آغاز می‌کنیم. بسیاری از اوقات توزیع نرمال را به خاطر سهم عمده گاس در این مورد، توزیع گاس می‌نامند. توزیع نرمال از دستور ریاضی زیر بدست می‌آید:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\, e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

در معادلهٔ بالا ، اعداد π و e اعداد ثابتی هستند که با آنها از پیش آشنا بوده‌ایم. مقادیر این دو عدد ثابت به ترتیب 3.14159 و 2.71828 می‌باشد. پارامترهای توزیع نرمال عبارتند از: μ میانگین و σ انحراف معیار و این دو به ترتیب به عنوان شاخصهای تمایل مرکزی و پراکندگی، آن‌چنان که در فصل اول از آنها نام برده شد، بکار می‌روند در عین حال چون هر متغیر تصادفی متصل که توزیع نرمال داشته باشد، مقادیر بین ∞- و ∞ +را به خود می‌گیرد تعریف میانگین و انحراف معیار آن مشکلتر خواهد بود و تعاریف دقیق آن را جز با استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال نمی‌توان ارائه داد.

از معادله توزیع نرمال استنباط می‌شود که این منحنی تنها دارای دو پارامتر μ و σ است. به عبارت دیگر با در دست داشتن این دو پارامتر می‌توان احتمال و یا فراوانی نسبی بین هر دو مقدار از متغیر x را محاسبه نمود. برای سهولت کار از بیان کامل توزیع نرمال خودداری کرده و تنها به ذکر میانگین و انحراف معیار توزیع اکتفا می‌کنند و به‌صورت $N(\mu, \sigma)$ می‌نویسند.

بدیهی است که هر مقدار انحراف توزیعی کمتر باشد، تمرکز سطح زیر منحنی بیشتر در اطراف میانگین خواهد بود. شکل زیر نمایشگر دو توزیع نرمال با میانگینهای مساوی ولی با انحراف معیارهای نامساوی است. چنانچه ملاحظه می‌گردد سطحی که در فاصله ۱- تا ۱ قرار دارد قسمت اعظم سطح زیر منحنی پر را شامل گردیده است در حالی که در منحنی نقطه‌چین این قسمت چندان زیاد نمی‌باشد.(روشهای آماری، دکتر کاظم محمد و همکاران)



نمودار توزیع طبیعی

منحنی شماره ۱

ویژگیهای عمده توزیع نرمال عبارتند از:

۱- توزیع نرمال حول میانگین، μ ، متقارن است. آنچنان که در شکل بالا نشان داده شده است، منحنی نرمال در هر یک از اطراف μ به تصویر طرف دیگر در آینه می‌ماند.

۲- در توزیع نرمال میانگین، میانه و نما همگی بر هم منطبق و با هم برابرند.

۳- سطح کل زیر منحنی نرمال بالای محور x ها برابر یک واحد مربع است. ویژگی حاضر از این حقیقت نتیجه می‌شود که توزیع نرمال یک توزیع احتمال می‌باشد. اگر در نقطه μ(میانگین) خط عمودی بر محور x ها فرود آوریم، بخاطر تقارن موجود در منحنی نرمال، ۵۰ درصد از سطح در طرف راست آن و ۵۰ درصد دیگر از سطح در طرف چپ خط محور قرار می‌گیرد.

۴- هرگاه در فاصلهٔ یک انحراف معیار از میانگین و در دو جهت آن بر روی محور x عمودهایی رسم کنیم، سطحی که در زیر منحنی و مابین این دو عمود قرار می‌گیرد تقریبا معادل 68 درصد سطح کل زیر منحنی خواهد بود. اگر عمودهای مزبور را در فاصلهٔ دو انحراف معیار از میانگین بر محور xها فرود آوریم، سطح محدودشده زیر منحنی بالای محور xها و مابین این دو عمود تقریبا ۹۵ درصد سطح کل زیر منحنی و محور افقی را در بر می‌گیرد. چنانچه روش فوق را همچنان ادامه داده و در فاصلهٔ سه انحراف معیار از میانگین و در جهت آن بر روی محور x خط عمود فرودآیند، 99.7 درصد از سطح کل زیر منحنی بدست می‌آید. که به شکل زیر نوشته می‌شود.

$P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \simeq 0/68$

$P(\mu -2\sigma \leq X\leq \mu +2\sigma) \simeq 0/95$

$P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) \simeq 0/997$

- **نکته: در توزیع نرمال $\overline{X}$ و S^2 همواره از هم مستقل هستند.**

سوال: اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین ۱۲ و واریانس ۲۷ باشد، میانگین نمونه‌ای $\overline{X}$ که بر اساس نمونه‌گیری تصادفی به حجم ۹ بدست می‌آید دارای کدام توزیع و به ترتیب با چه مقدار میانگین و انحراف معیار می‌باشد؟(ارشد ۹۰)

۱)t با میانگین ۱۲ و انحراف معیار $\sqrt{3}$

۲)t با میانگین ۱۲ و انحراف معیار ۳

۳)نرمال با میانگین ۴ و انحراف معیار ۳

۴)نرمال با میانگین ۱۲ و انحراف معیار $\sqrt{3}$

پاسخ گزینه ۴ / توزیع $\overline{X}$ دارای میانگین ۱۲= μ و واریانس $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ می‌باشد که $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{9}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$

سوال- اگر واریانس جامعه برابر با ۶۴۰۰ باشد، خطای معیار میانگین نمونه تصادفی به حجم ۶۴ برابر است با: (ارشد ۹۹)

الف) ۱۰ ب) ۱۰۰ ج) ۸۰ د) ۸

پاسخ گزینه ۱/ خطای معیار میانگین

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{n} = \frac{80}{\sqrt{64}} = 10$$

سوال- وزن نوزاد هنگام تولد از توزیعی نرمال با میانگین ۳/۴ کیلوگرم و واریانس ۰/۶۴ کیلوگرم پیروی می کند. اگر هر کیلوگرم تقریبا ۲/۲ پوند باشد، میانگین و انحراف معیار بر حسب پوند کدام گزینه است؟(ارشد ۹۹)

الف) σ=۰/۸ و μ=۳/۴

ب) σ=۰/۸ و μ=۷/۴۸

ج) σ=۱/۷۶ و μ=۳/۴

د) σ=۱/۷۶ و μ=۷/۴۸

پاسخ گزینه ۴/

$\sigma^2=0/64 \quad , \quad \sigma = 0/8$

$\mu = 2/2 \times 3/4 = 7/48$

$\sigma = 2/2 \times 0/8 = 1/76$

۱۱۲-اگر یک نمونه تصادفی به حجم ۴۰ نفر از صفتی با میانگین μ و واریانس σ^2 انتخاب کنیم، کدام یک از موارد زیر صحیح است؟(ارشد ۹۸)

الف) واریانس میانگین نمونه ای برابر $\frac{\sigma^2}{2}$ است. ب) واریانس میانگین نمونه ای برابر با σ^2 است.

ج) واریانس میانیگن نمونه ای از σ^2 کوچکتر است. د) واریانس میانیگن نمونه ای از σ^2 بزرگتر است.

۱۱۲)پاسخ گزینه ۳/ با توجه به فرمول واریانس میانگین نمونه داریم:

$$e_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}$$

توزیع نرمال استاندارد:

توزیع نرمال استاندارد را بدین جهت به این نام می‌خوانند که دارای میانگین صفر و انحراف معیار یک می‌باشد. توزیع نرمال استاندارد را با قرار دادن$\mu = 0$ و $\sigma = 1$ در توزیع نرمال بدست می‌آورند. متغیر تصادفی $\frac{x-\mu}{\sigma}$ را معمولا با حرف z نشان داده به قسمی که معادله توزیع نرمال استاندارد به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad -\infty < Z < +\infty$$

- نکته: هرگاه x دارای توزیع نرمال$X \sim N(\mu , \sigma^2)$ باشد هر ترکیب خطی از آن به‌صورت $y=bx+a$ باز هم نرمال خواهد بود. در این حالت کافی است امید و واریانس y را محاسبه کنیم.
- نکته: اگر x یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، برای محاسبه احتمال، از تغییر متغیر $z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ استفاده نموده و آن را به نرمال استاندارد تبدیل می‌کنیم و احتمال مربوط به نرمال استاندارد را از جدول ۴ پیوست بدست می‌آوریم بنابراین خواهیم داشت:

$$P(x_1 < X < x_2) = P(z_1 = \frac{x_1-\mu}{\sigma} < Z = \frac{x-\mu}{\sigma} < z_2 = \frac{x_2-\mu}{\sigma})$$

سوال-در یک توزیع نرمال استاندارد همواره واریانس: (ارشد ۹۹)

الف) از ۹۵ درصد میانگین کوچک تر است. ب) کوچک تر از میانگین است.

ج) بزرگ تر از میانگین است. د) از ۹۰ درصد میانگین کوچک تر است.

پاسخ گزینه ۳/ در توزیع نرمال استاندارد میانگین صفر و واریانس یک می باشد.

سوال- هنگامی که یک متغیر تصادفی را استاندارد می کنیم، متغیر حاصل دارای کدام یک از ویژگی های زیر است؟(ارشد ۹۹)

الف) متغیر نرمال با میانگین صفر و انحراف معیار یک است.

ب) متغیر نرمال با میانگین صفر و انحراف معیار کمتر از یک است.

ج) متغر نرمال با میانگین صفر و واریانس بزرگتر از یک است.

د) لزوماً نرمال نخواهد بود.

پاسخ گزینه ۴/ هنگامی که یک متغیر تصادفی را استاندارد می کنیم لزوما نرمال نخواهد بود.

محاسبه سطح زیر منحنی نرمال:

اگر به عنوان مثال توزیع مقدار قندخون افراد جامعه‌ای، نرمال(البته کرانه‌های این منحنی تا بینهایت ادامه نخواهد داشت ولی چون سطح ناچیزی از منحنی به دو انتهای ان تعلق دارد، فرض نرمال بودن توزیع اشکالی ایجاد نخواهد کرد) با میانگین ۱۰۰ و انحراف معیار ۲/۵ سانتی‌گرم در لیتر باشد و ما بخواهیم این احتمال را که قندخون یک نفر ۱۰۵ سانتی‌گرم در لیتر به بالا باشد بدست آوریم باید به محاسبه سطحی از منحنی که در فاصله ۱۰۵ و بی‌نهایت قرار دارد بپردازیم. این کار مستلزم انتگرال‌گیری از معادله $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ در فاصله ۱۰۵ تا بی‌نهایت است که کار نسبتا مشکلی است، به خصوص که پارامترهای توزیع نرمال، بسته به اندازه‌های صفت مورد مطالعه، متغیر بوده و در نتیجه بایستی سطح زیر منحنی را برای فواصل مختلف در منحنی‌های نرمال با پارامترهای متفاوت محاسبه نمود.(دکتر کاظم محمد و همکاران)

جدول IV در پیوست، گویای سطح زیر منحنی توزیع نرمال استاندارد در فاصله میانگین(صفر)تا مقادیر مختلف Z است که براساس انتگرال‌گیری از معادله $f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-z^2}{2}}$ محاسبه شده است. از جدول IV نتیجه می‌شود که مثلا سطح زیر منحنی نرمال استاندارد در فاصله $Z=0$ تا $Z=1$ برابر ۰/۳۴۱۳ است و یا در فاصله ۲ تا بی‌نهایت برابر ۰/۰۲۲۸=۰/۴۷۷۲-۰/۵ است.

بدین ترتیب اگر بخواهیم سطحی از منحنی توزیع قندخون را که در فاصله ۹۵ تا ۱۰۲/۵ قرار دارد محاسبه نمائیم لازم است ابتدا این اندازه‌ها را با استفاده از فرمول $Z=\frac{x-\mu}{\sigma}$ به Z تبدیل کرده و آنگاه براساس Z حاصل و با استفاده از جدول IV سطح معادل آن را در توزیع نرمال استاندارد به‌صورت زیر محاسبه کرد:

$$Z_1=\frac{95-100}{2/5}=-2$$

$Z_2=\frac{102/5-100}{2/5}=1$

(علامت منها معرف این است که از سطح مورد نظر در طرف چپ میانگین قرار دارد).

بنابراین داریم:

$P(95<X<102/5)=P(-2<Z<1)=P(-2<Z<0)+P(0<Z<1)$

با توجه به متقارن بودن توزیع نرمال داریم

$P(-2<Z<0)=P(0<Z<2)$:

با کمک جدول IV مقدار احتمال $P(0<Z<2)=0/4772$ می‌باشد و مقدار احتمال $P(0<Z<1)=0/3413$ می‌باشد و خواهیم داشت:

$P(95<X<102/5)=0/4772+0/3413=0/8185$

با توجه به مثال فوق، اگر بخواهیم احتمال اینکه قندخون فردی از ۹۲/۵ سانتی‌گرم در لیتر کمتر باشد محاسبه نمائیم به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$Z=\frac{92/5-100}{2/5}=-3$

$P(X<92/5)=P(Z<-3)$

سطحی که در توزیع نرمال استاندارد در فاصله ۳- تا صفر قرار دارد برابر ۰/۴۹۸۷ است، بنابراین سطحی که در فاصله بی‌نهایت تا ۳- قرار دارد(طرف چپ نقطه ۳-) برابر ۰/۰۰۱۳=۰/۴۹۸۷-۰/۵ خواهد شد بدین ترتیب احتمال اینکه قندخون فردی از ۹۲/۵ سانتی‌گرم در لیتر کمتر باشد مساوی ۰/۰۰۱۳ است.(دکتر کاظم محمد و همکاران)

- نکته: در شکل زیر، منحنی نرمال استاندارد و سطوح زیر آن که معرف مقادیر مختلف مثبت و منفی Z می‌باشد نشان داده شده است به دلیل آنکه در تست‌های کنکور جدول توزیع Z، داده نمی‌شود بهترین کار برای جواب دادن مسائل، حفظ کردن اعداد زیر است.

. سوال-اگر توزیع قند خون در یک جامعه بصورت نرمال با میانگین ۹۰ و انحراف معیار ۵ توزیع شده باشد تقریبا چند درصد افراد این جامعه دارای قند خون کمتر از ۸۰ هستند؟(ارشد ۹۷)

الف)۲/۵ ب)۵ ج)۲۵ د)۱

پاسخ گزینه ۱/ با توجه به نمودار ارائه شده داریم:

$\mu = 90 \qquad \sigma = 5$

$p\left(z < \frac{80-90}{5}\right) = p(z < -2) \pm 2/5$

سوال-میانگین و انحراف معیار فشار خون سیستولیک در یک جامعه به ترتیب ۱۲۰ و ۱۰ میلی متر جیوه است. فشار خون چند درصد از افراد این جامعه بین ۱۱۰ تا ۱۳۰ میلی متر جیوه است؟(ارشد ۹۷)

الف)۹۵ درصد ب)۹۰ درصد ج)۳۴ درصد د)۶۸ درصد

پاسخ گزینه ۴/

$\mu = 120 \quad , \quad \sigma = 10$

$p(110<x<130)=p(\frac{110-120}{10} < z < \frac{130-120}{10}) = p(-1 < z < 1)$

سوال- اگر وزن نوزادان دارای توزیع نرمال با میانگین و انحراف معیار به ترتیب ۳/۲ و ۰/۵ کیلوگرم باشد، وزن چند درصد از نوزادان کمتر از ۳/۷ کیلوگرم است؟(ارشد ۹۹)

الف) ۰/۶۸ ب) ۰/۸۴ ج) ۰/۱۶ د) ۰/۳۲

پاسخ گزینه ۲/ با توجه به منحنی شماره ۲ داریم:

$\mu = 3/2 , \sigma = 0/5$

$P(x<3/7)=p(z\frac{3/7-3/2}{0/5})=p(z<1)=0/5+0/34=0/84$

سوال- در یک نمونه ۲۵ نفری از اندازه های فشار خون افراد جامعه که دارای توزیع نرمال است، احتمال این که میانیگن این نمونه در فاصله یک پنجم انحراف معیار از میانیگن واقعی جامعه قرار بگیرد برابر است با: (ارشد ۹۹)

الف) ۰/۳۴ ب) ۰/۹۵ ج) ۰/۶۸ د) ۰/۱۴

پاسخ گزینه ۳/

سوال-اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با واریانس ۱۶ باشد، احتمال اینکه میانگین یه نمونه تصادفی ۱۶ تایی از این جامعه کمتر از یک واحد با میانگین واقعی جامعه فاصله داشته باشد برابر است با: (ارشد ۹۸)

الف) ۰/۹۵ ب) ۰/۴۷۵ ج) ۰/۶۸ د) ۰/۳۴

پاسخ گزینه ۳/ با توجه به نمودار ارائه شده داریم:

$\sigma^2=16 , \sigma = 4$

$P(\bar{x} - \mu < 1) = p(z < \frac{1}{\frac{4}{\sqrt{16}}}) = p(z < 1) = 0/68$

سوال-در یک توزیع نرمال با میانگین ۱- و انحراف معیار ۱، چند درصد از مقادیر مثبت است؟(ارشد ۹۸)

الف) ۰/۸۴ ب) ۰/۶۸ ج) ۰/۳۴ د) ۰/۱۶

پاسخ گزینه ۴ / با توجه به منحنی شماره ۲ داریم:

$\mu = -1 \quad , \quad \sigma = 1$

$p(x>0)=p(z>\frac{0+1}{1})=p(z>1)\cong 0/16$